

سلسلة 2	المتتاليات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
	$v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad , \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} ; n \geq 0 \end{cases}$	<b>تمرين 1 :</b>
	$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3}$ $v_{n+1} - v_n = \frac{6 - u_n}{9 - 18 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{3(-3 + u_n)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{-1}{3}$ <p>لدينا :</p> <p>بالتالي <math>(v_n)</math> متتالية حسابية أساسها <math>r = \frac{-1}{3}</math> و حدها الأول <math>v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}</math></p>	1
	$v_n = v_0 + r n = \frac{-1}{4} - \frac{1}{3} n = \frac{-4n - 3}{12}$ <p>لدينا حسب السؤال السابق :</p> $u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{-12}{4n + 3} + 3 = \frac{-12 + 12n + 9}{4n + 3} = \frac{12n - 3}{4n + 3}$ <p>لدينا : <math>v_n = \frac{1}{u_n - 3}</math> منه : <math>u_n - 3 = \frac{1}{v_n}</math> منه :</p>	2
	$S = v_0 + v_2 + \dots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{\frac{-1}{4} + \frac{-4(n-1) - 3}{12}}{2} \times n = \frac{-3 - 4n + 4 - 3}{12} \times n = \frac{-n(2n + 1)}{12}$	3
	$v_n = u_{n+1} - u_n \quad , \quad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n ; n \geq 0 \end{cases}$	<b>تمرين 2 :</b>
	$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2} v_n$ <p>إذن <math>(v_n)</math> متتالية هندسية أساسها <math>q = \frac{1}{2}</math> و حدها الأول <math>v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3</math></p>	1
	$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$ <p>لدينا</p>	2
	$u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ <p>لدينا حسب السؤال السابق :</p> $u_n = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}$ <p>إذن :</p>	3
	$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = v_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{2} v_n\right)^2 = \frac{1}{4} v_n^2 = \frac{1}{4} w_n$ <p>لدينا ، <math>w_n = v_n^2</math> نعتبر المتتالية <math>(w_n)_{n \geq 0}</math> هندسية أساسها <math>\frac{1}{4}</math> و حدها الأول : <math>w_0 = 9</math></p> <p>إذن :</p> $S = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 = w_0 + w_1 + \dots + w_n = w_0 \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{36}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) = 12 - \frac{3}{4^n}$ <p>منه :</p>	4
<p>لحساب مجموع متتالية غالبا ما نحدد طبيعتها أولا كالسؤال 4 أو قد نستعمل تبسيطا كالسؤال 2.</p>		

$$t_n = 3u_n + 2v_n, \quad w_n = v_n - u_n, \quad \begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; n \geq 0 \end{cases} \quad \text{تمرين 3:}$$

أ) لدينا:  $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{4u_n + 2v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{u_n - v_n}{6} = \frac{w_n}{6}$   
 إذن  $(w_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{6}$  وحدها الأول  $w_0 = 1 - 7 = -6$

ب)  $w_n = w_0 q^n = -6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{-1}{6^{n-1}}$

أ) لدينا:  $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + v_n = 3u_n + 2v_n = t_n$   
 ب) بما أن  $(t_n)_{n \geq 0}$  متتالية ثابتة:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 2v_0 = 3 + 14 = 17$

لدينا حسب ما سبق:  $\begin{cases} 2u_n - 2v_n = 2w_n \\ 3u_n - 3v_n = 3w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5u_n = 2w_n + t_n \\ 5v_n = t_n - 3w_n \end{cases}$

بالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_n = \frac{2w_n + t_n}{5} = \frac{1}{5} \left( \frac{-2}{6^{n-1}} + 17 \right) \\ v_n = \frac{t_n - 3w_n}{5} = \frac{1}{5} \left( 17 + \frac{3}{6^{n-1}} \right) \end{cases}$

يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض الصيغ المحصل عليها (يمكنك أيضا حساب بعض القيم الخاصة للتحقق من صحة النتائج مثل  $u_0$  و  $v_0$ )

$$t_n = 3u_n + 10v_n, \quad w_n = v_n - u_n, \quad \begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}; n \geq 0 \end{cases} \quad \text{تمرين 4:}$$

لدينا:  $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15} w_{n+1}$   
 إذن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{2}{15}$  وحدها الأول  $w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$

منه:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$

لدينا:  $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 4v_n) = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n$   
 إذن  $(w_n)$  متتالية ثابتة، منه:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23$

لدينا حسب ما سبق:  $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3u_n + 10v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13u_n = t_n - 10w_n \end{cases}$

منه:  $\begin{cases} v_n = \frac{t_n + 3w_n}{13} = \frac{23 + 3\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} = \frac{23 - 10\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13} \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n - u_n, \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; n \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; n \geq 0 \end{cases}, \quad 0 < a < b \quad \text{تمرين 5}$$

سنستعمل برهانا بالترجع.

بالنسبة لـ  $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن:  $u_0 = a$  و  $v_0 = b$  و  $0 < a < b$

نفترض أن:  $0 < u_n < v_n$  و نبين أن:  $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$

$$0 < u_n < v_n \Rightarrow \begin{cases} 2u_n v_n > 0 \\ u_n + v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} > 0$$

و لدينا:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$$

إذن:  $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$  ، بالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < v_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = u_n \left( \frac{2v_n}{u_n + v_n} - 1 \right) = u_n \frac{v_n - u_n}{u_n + v_n} > 0 \quad : n \in \mathbb{N} \text{ لدينا لكل}$$

$$\text{و } 0 < v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$$

سنستعمل برهانا بالترجع.

بالنسبة لـ  $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن:  $u_0 v_0 = ab$ .

$$\text{نفترض أن: } u_n v_n = ab \text{ ، لدينا: } u_{n+1} v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n = ab$$

بالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n v_n = ab$

$$0 < u_n < v_n \Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n^2 < v_n u_n \\ 0 < u_n v_n < v_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n^2 < ab \\ 0 < ab < v_n^2 \end{cases} \Rightarrow u_n < \sqrt{ab} < v_n \quad : n \in \mathbb{N} \text{ لدينا لكل}$$

لدينا حسب السؤال 1 ،  $v_n > u_n$  ، إذن:  $w_n = v_n - u_n > 0$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(v_n - u_n)}{2} \times \frac{v_n - u_n}{u_n + v_n} = \frac{w_n}{2} \left( \frac{v_n + u_n - 2u_n}{u_n + v_n} \right) = \frac{w_n}{2} \left( 1 - 2 \frac{u_n}{u_n + v_n} \right) < \frac{w_n}{2} \quad (أ)$$

بالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < w_{n+1} < \frac{1}{2} w_n$

$$\begin{cases} 0 < w_1 < \frac{1}{2} w_0 \\ 0 < w_2 < \frac{1}{2} w_1 \\ \dots \\ 0 < w_n < \frac{1}{2} w_{n-1} \end{cases} \quad \text{لدينا حسب السؤال السابق لكل } n \in \mathbb{N}$$

5

(ب)

بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الاختزال نجد:  $0 < w_n \leq w_0 \left( \frac{1}{2} \right)^n$  أي  $0 < w_n \leq (b-a) \left( \frac{1}{2} \right)^n$

بأخذ  $a=1$  و  $b=2$  نستنتج أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < \sqrt{2} < v_n$  و  $0 < w_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

لكي تكون  $u_n$  قيمة مقربة بتفريط و  $v_n$  قيمة مقربة بإفراط للعدد  $\sqrt{2}$  إلى  $10^{-4}$ ، يجب أن يكون

$$v_n - u_n = w_n \leq 10^{-4}$$

ولتحقق ذلك يكفي أن يكون:  $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-4}$  أي  $2^{n-1} \geq 10000$  أي  $2^n \geq 20000$

وباستعمال آلة حاسبة وحساب قيم  $2^n$  من أجل قيم صحيحة طبيعية (1, 2, ...) سنجد أنه يكفي أن يكون  $n \geq 15$

6

في السؤال 3 يمكن إثبات أن المتتالية  $x_n = u_n v_n$  ثابتة ثم الاستنتاج.

في السؤال 5 ب يمكن استعمال برهان بالترجع

في السؤال الأخير إيجاد قيم العدد  $n$  يمكنه إيجاد استعمال دالة اللوغاريتم النييري أو اللوغاريتمي (التي تدرس في السنة

الثانية بكالوريا) كما يلي  $2^n \geq 20000$  تكافئ  $\log_{10}(2^{n-1}) \geq \log_{10}(10000)$  تكافئ  $(n-1)\log_{10}(2) \geq 4$  تكافئ

$$n \geq \frac{4}{\log_{10}(2)} + 1 \approx 14,2 \text{ ، و باستخدام آلة حاسبة نجد: } \frac{4}{\log_{10}(2)} + 1 \approx 14,2 \text{ وهذا يعني أن } n \geq 15$$