السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليـــــــــات حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \;; n \geq 0 \end{cases}$

لنبين بالترجع أن : $u_n = 3\times 2^n + 1 \quad \forall n \in IN$

- بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ و $3\times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$ منه : $u_0 = 3\times 2^0 + 1$
- نفترض أن : $u_n = 3\times 2^n + 1$ ونبين أن : $u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + 1$

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3\times 2^n + 1) - 1 = 2\times 3\times 2^n + 2 - 1 = 3\times 2^{n+1} + 1$

تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \;; n \geq 0 \end{cases}$

1

$u_1 = 3u_0 - 4$	$u_2 = 3u_1 - 4$
$u_1 = 15 - 4 = 11$	$u_2 = 33 - 4 = 29$

2 لنبين بالترجع أن $u_n > 2 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 5$ منه : $u_0 > 2$

نفترض أن : $u_n > 2$ ونبين أن : $u_{n+1} > 2$

لدينا : $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$

3 لدينا : $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0 \quad \forall n \in IN$ ، إذن (u_n) تزايدية

لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتابة المتتالية و هذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.

تمرين 3 : $u_0 = 3 \;;\; u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$

1 لنبين بالترجع أن $u_n \geq 2 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 3$ منه : $u_0 \geq 2$

نفترض أن : $u_n \geq 2$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 2$

لدينا : $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) - 2 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n} - 4\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u_n^2 + 4 - 4u_n}{u_n} = \frac{(u_n - 2)^2}{2u_n} \geq 0$ منه : $u_{n+1} \geq 2$

بالتالي : $u_n \geq 2 \quad \forall n \in IN$ أي أن u_n مصغورة بـ 2

لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة ، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.

2 لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2 + u_n)(2 - u_n)}{2u_n}$

و بما أن $u_n \geq 2$ (حسب السؤال السابق) فإن $2 - u_n \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ و $2u_n > 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

و بالتالي : (u_n) تناقصية

تمرين 4 : $u_0 = 4 \;;\; u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$

1 لنبين بالترجع أن $u_n \geq 3 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ منه : $u_0 \geq 3$

نفترض أن : $u_n \geq 3$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 3$

لدينا :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 6u_n + 3u_n - 9}{u_n + 2} = \frac{2u_n(u - 3) + 3(u_n - 3)}{u_n + 2} = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$$

وبما أن $u_n \geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$

إذن $u_{n+1} - 3 \geq 0$ ومنه : $u_{n+1} \geq 3$

يمكن استعمال المحددة لتعميل التعبير $2u_n^2 - 3u_n - 9$

2

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - 3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{u_n(u_n + 1) - 3(u_n + 1)}{u_n + 2} = \frac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n \geq 3$ فإن : $u_n - 3 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

و بالتالي : (u_n) تزايدية

لاحظ أن تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 1

تمرين 5 : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$

- بالنسبة لـ $n = 0$ $u_0 = 1 \geq \sqrt{0}$
- نفترض أن : $u_n \geq \sqrt{n}$ و نبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

لدينا : $u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_n^2 \geq n \Rightarrow (u_{n+1})^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geq n + 2 \Rightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$

تقنية الفرق أو حتى التأطير المباشر كلا هما غير مجديان، لذلك نحاول التأطير عبر المرور بالمربع.

فكرة التمرين بسيطة لكنها تغني عن أسطر كثيرة في حال اتباع طريقة أخرى.

تمرين 6 : $\forall n \in IN^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

1

لدينا : $\forall k \in IN^* \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0$

بالتالي : $\forall k \in IN^* \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2

لدينا حسب السؤال السابق : $\begin{cases} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \ldots\ldots < \ldots\ldots \\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{cases}$ و بجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $u_n - 1 < 1 - \frac{1}{n}$

منه : $u_n < 2 - \frac{1}{n}$ منه : $u_n < 2$ بالتالي (u_n) مكبورة بالعدد 2

الكتابة $u_n < 2 - \frac{1}{n}$ لا تكفي للقول أن u_n مكبورة لأن $2 - \frac{1}{n}$ ليس تعبيرا ثابتا بل مرتبطا بـ n

تمرين 7 : $\forall n \in IN^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1

- بالنسبة لـ $n = 1$: $u_1 = 1 \geq \sqrt{1}$
- نفترض أن $u_n \geq \sqrt{n}$ و نبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

لدينا : $u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$

الأصح أعلاه استعمال الرمز $\geq$ عوض $=$، لكننا استعملناه فقط لنبين حالات التساوي و حالات التأطير

	يمكن حل التمرين دون ترجع، لكن الهدف هو إتقان البرهان بالترجع	
2	نفترض أن (u_n) مكبورة إذن : $\exists M \in IR \ / \ \forall n \in IN^* \ u_n \le M$ منه : $\forall n \in IN^* \ \sqrt{n} \le M$ منه : $\forall n \in IN^* \ M^2 \ge n$ و هذا غير ممكن لأن مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير محدودة، بالتالي (u_n) غير مكبورة	
	تمرين 8 : $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)}$	
1	لدينا : $\forall n \in IN^* \ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$	
2	$\forall n \in IN^* \ u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ تمرين بسيط، لكنه لم يكن ليكون سهلا لولا السؤال الأول	