التمرين الأول

1) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ بحيث : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

أ- بين أن $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ مكبورة

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = -1$ ، $U_1 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$

1) نضع $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ و $W_n = 2^n U_n$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- بين أن $(W_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب W_n بدلالة n

2) استنتج مما سبق الحد العام $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

3) نضع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ بين أن $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(U_n^2 - U_n + \frac{1}{2}\right)}$

و نضع $V_n = U_n^2 - U_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$

1) بين أن $U_n \geq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية

ب- استنتج أن $U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{2^n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) بين أن $0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الرابع

لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2}$

1) أ- بين أن $0 < U_n < 6 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

2) نضع $V_n = \frac{U_n - 6}{U_n + 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

ب- أحسب U_n بدلالة n

3) بين أن $|U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2}|U_n - 6| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

4) بين بالترجع أن $|U_n - 6| \leq 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين الخامس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية بحيث : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n^2 + U_n$

1) بين أنّ $U_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أنّ المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ- تحقق أنّ $U_{n+1} \geq 2U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أنّ $U_n \geq 2^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين السادس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_0 = -2$ و $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + 2}{U_n - 2}$

1) بين أنّ $U_n \leq -1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أنّ المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ- بين أنّ $|U_{n+1} + 1| \leq \frac{1}{2}|U_n + 1|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أنّ $|U_n + 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين السابع

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$

1) أ- بين أنّ $U_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

2) بين أنّ $U_n \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) بين أنّ $U_n U_{n+2} + (-1)^{n+1} = (U_{n+1})^2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

4) نضع $x_n = \dfrac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$ و $y_n = \dfrac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أنّ $y_n - x_n = \dfrac{1}{U_{2n} U_{2n+1}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و استنتج أنّ $0 < y_n - x_n < \dfrac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- بين أنّ $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{U_{2n} U_{2n+2}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و أنّ $x_n = \dfrac{1}{y_n} - 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- بين أنّ المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية و أنّ المتتالية $(y_n)_n$ تناقصية

5) نضع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{U_k}{3^k}$ لكل عدد طبيعي n

أ- أحسب $3S_n$ و $3(3S_n - S_n)$

ب- استنتج العلاقة التي تربط S_n , S_{n-2} ; U_n

6) بين أنّ $U_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$