التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

أثبت أن : $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ وأثبت أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n < 2$

التمرين الثاني :

$(U_n)_{n\geq 2}$ متتالية عددية و بحيث : $U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1}$

1) أحسب U_2 ; U_3

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq 2}$

3) تحقق أن $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$ ثم استنتج أن $(U_n)_{n\geq 2}$ متتالية مكبورة

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) حدد U_1 و U_2 و بين أن $U_2 > U_1$

2) أ- بين أن $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ لكل عدد k طبيعي غير منعدم

ب- استنتج أن $(U_n)_{n\geq 1}$ مكبورة بالعدد 2

التمرين الرابع :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = 3 - \frac{9}{4U_n}$

1) بين أن $U_n > \frac{3}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

أ- نضع $V_n = \frac{2}{2U_n - 3}$ أ- بين أن: $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية

ب- بين أن $U_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

التمرين الخامس :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $U_0 = \frac{4}{3}$ و $U_{n+1} = \frac{6U_n - 3}{2U_n + 1}$

1- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < U_n < \frac{3}{2}$ (لاحظ أن $U_{n+1} = 3 - \frac{6}{2U_n + 1}$)

2- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3- نضع $V_n = \frac{2U_n - 3}{U_n - 1}$. بين أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أحسب U_n بدلالة n

التمرين السادس :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n^2}{1 + U_n^3}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) بين أن $U_{n+1} \le \frac{8}{9}U_n$ و استنتج أن $U_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

التمرين السابع :

$(U_n)_{n\ge1}$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_1 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} + \frac{3n}{n+1}U_n$

1) بين أن $U_n > -2$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$

3) نضع $V_n = n(2+U_n)$ أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها و أحسب U_n بدلالة n

ب- أحسب الجمع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} kU_k$

التمرين الثامن :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = 3 \quad ; \quad U_1 = 3 \\ U_{n+2} = \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{4}{9}U_n \end{cases}$

1) أحسب U_2 ; U_3

2) نضع $V_n = U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n$ بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و حدد أساسها و أحسب V_n بدلالة n

3) استنتج أن $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) نضع $W_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n V_n$

أ- بين أن $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها r

ب- استنتج أن $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(n+2)$

التمرين التاسع :

✌ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية بحيث $S_n = U_0 + U_1 + ...+U_{n-1} = \frac{2n^2+n}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أحسب U_0 ; U_1 n ثم بين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية و حدد U_n بدلالة n

✋ لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r \ne 0$ و $U_0 = 4$ و بحيث U_1 ; U_4 ; U_{12} حدود متتابعة لمتتالية هندسية

بين أن $r = 5$ و أحسب الجمع $U_0 + U_1 + ...+U_{12}$ أو أحسب $U_0 + U_1 + ...+U_{n-1}$

☜ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r موجب و بحيث : $\begin{cases} U_0 + U_1 + U_2 = 15 \\ U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 = 107 \end{cases}$

بين أن $U_1 = 5$ و استنتج أن $r = 4$ ثم أحسب الجمع $U_0 + U_1 + ...+U_n$

☺ لتكن $(V_n)_n$ متتالية هندسية بحيث : $\begin{cases} V_0V_1V_2 = 27 \\ V_0 + V_1 + V_2 = 13 \end{cases}$ بين أن $V_1 = 3$ و استنتج أن $q = 3$ أو $q = \frac{1}{3}$

أحسب في كل حالة الجمع $V_0 + V_1 + ...+V_{n-1}$

التمرين العاشر :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_0 = 1$; $U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ و نضع $V_n = 2U_n - n$

1) أحسب U_1 و بين بالترجع أن $U_n \geq \frac{n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

4) أ- بين أن $U_n = 2^n + \frac{1}{2}n$

ب- بين أن $U_0 + U_1 + ... + U_{n-1} = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{4}$

التمرين الحادي عشر :

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(n+2)U_n}$ و $U_0 = \frac{1}{3}$

1) أحسب U_1

2) نضع $V_n = \frac{1}{U_n} - n$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

ب- أحسب U_n بدلالة n

3) احسب بدلالة n الجمع : $T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني عشر :

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ و $U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$

1) نضع $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ و $W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- بين أن $(W_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب W_n بدلالة n

2) استنتج مما سبق الحد العام U_n بدلالة n

التمرين الثالث عشر :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{k}$ و $V_n = \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

1) بين أن $V_n < U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ تناقصية و أن المتتالية $(V_n)_{n\geq1}$ تزايدية

التمرين الرابع عشر :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}U_n}$

1) أحسب U_1 و بين أن $0 < U_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) أ- بين أن $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{3}{5}|U_n - 2| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $|U_n - 2| \leq \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$