درس : المتتاليات العددية

i. عموميات حول المتتاليات العددية :

01. نشاط :

قديما أراد إمبراطور بلاد الهند مكافئة الحكيم الذي اختراع اللعبة الشطرنج و هي قطعة مربعة قسمت على 64 قطعة مربعة متساوي.
قال الحكيم للإمبراطور "مكافئة هي أن تطع في المربع الموالي لكل مربع ضعف حبات من القمح التي كانت في المربع السابق مع العلم أن المربع الأول نضع حبة واحدة فقط .
قال الإمبراطور " طلبك بسيط "
قال الحكيم "طلبي بسيط مثل بساطة هذه اللعبة "
التساؤل المطروح: هل طلب الحكيم بسيط؟ هذا الفصل سيعطي الجواب
ترييض هذه الوضعية :
المربع الأول نربطه بعدد حبات القمح (أي $1 \mapsto 1$) . المربع الثاني نربطه بعدد حبات القمح (أي $2 \mapsto 2\times1=2$) . المربع الثالث نربطه بعدد حبات القمح (أي $3 \mapsto 2\times2=2^2$) . المربع الرابع نربطه بعدد حبات القمح (أي $4 \mapsto 2\times2^2=2^3$) .....
نحصل على التطبيق الاتي :(أتمم التطبيق التالي)

$$f : I=\{1;2;3;\dots;?\} \to \mathbb{R}$$
$$i \to \cdots ?$$

02. مفردات :

- التطبيق السابق يسمى متتالية عددية من I (I ضمن $\mathbb{N}$) إلى $\mathbb{R}$.
- نرمز للمتتالية ب: u أو v أو w ...
- نرمز ل $f(x)$ ب $u(n)$ أو باختصار u_n .
- العدد n يسمى المدل .
- u_n يسمى الحد العام للمتتالية u أو u_n .
- العدد $u_1=2^0=1$ يسمى الحد الأول للمتتالية u_n و نرمز له بصفة عامة u_{n_0}
- التطبيق f نرمز له ب : $(u_n)_{n\in I}$ أو $\left(u_n=2^{n-1}\right)_{n\in I}$ أو $\left(u_n=2^{n-1}\right)_{n\in\{1;2;\dots;64\}}$ أو $\left(u_n=2^{n-1}\right)_{1\le n\le 64}$.

03. تعريف :

> I ضمن $\mathbb{N}$. كل تطبيق u من I إلى $\mathbb{R}$ يسمى متتالية عددية ونرمز له ب: u_n

u_n يسمى الحد العام للمتتالية و u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية. (n_0 هو أصغر عدد من I)

04. أمثلة :

$(w_n=2n)_{n\ge0}$ و $v_n=\dfrac{1}{n-1}\ ;\ n\ge2$ و $u_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}$ و $\begin{cases} u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n\ ;\ n\ge0 \\ u_0=3\ ;\ u_1=4 \end{cases}$

المتتالية الأخيرة : لحساب u_{i+2} يجب حساب حديها u_{i+1} و u_i لهذا نقول u_n متتالية معرفة بعلاقة ترجعية أو u_n متتالية ترجعية من الرتبة 2
أحسب u_2 و u_3.

05. تمرين :

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ مع $\begin{cases} v_1 \\ v_{n+1}=1+v_n \end{cases}$

1) احسب $v_2\ ;\ v_3\ ;\ v_4$.
2) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n=n$.

ii. متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة :

01. نشاط :

نعتبر المتتالية العددية : $(u_n=\dfrac{1}{n})_{n>1}$.

3) بين أن: $\forall n>1\ ;\ u_n<1$. 2) بين أن : $\forall n>1\ ;\ u_n>0$. 3) ماذا نستنتج ؟

02. تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية. M و m عددين من $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة ب M يكافئ $\forall n\geq n_0; u_n\leq M$. (أو $\forall n\geq n_0; u_n<M$)
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة ب m يكافئ $\forall n\geq n_0; m\leq u_n$. (أو $\forall n\geq n_0; m<u_n$)
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة يكافئ إن u_n مكبورة ومحدودة .

03. مثال :

نعتبر المتتالية العددية : $\left(w_n=\dfrac{n+3}{n+4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. بين أن: w_n مكبورة ثم مصغورة على $\mathbb{N}$.

iii. رتابة متتالية :

01. نشاط :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و n و n' أكبر من أو يساوي n_0 .أكتب علاقة حيث تكون u_n متتالية تزايدية .

02. تعريف :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

1) u_n متتالية تزايدية على I يكافئ $\forall n,m\in I; n<m\Rightarrow u_n\leq u_m$. (أما $u_n<u_m$ تزايدية قطعا على I)
2) u_n متتالية تناقصية على I يكافئ $\forall n,m\in I; n<m\Rightarrow u_n\geq u_m$. (أما $u_n>u_m$ تناقصية قطعا على I)
3) u_n متتالية ثابتة على I يكافئ $\forall n,m\in I; u_n=u_m$

03. خاصية :

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- u_n متتالية تزايدية على I يكافئ: $\forall n\in I; u_n\leq u_{n+1}$. (أما $u_n<u_{n+1}$ تزايدية قطعا على I)
- u_n متتالية تناقصية على I يكافئ: $\forall n\in I; u_n\geq u_{n+1}$. (أما $u_n>u_{n+1}$ تناقصية قطعا على I)
- u_n متتالية ثابتة على I يكافئ: $\forall n\in I; u_{n+1}=u_n$

04. مثال :

نأخذ $w_1=1$ و $w_{n+1}=1+w_n$. أدرس رتابة w_n .

iv. المتتالية الحسابية :

01. نشاط :

نفترض أن جبل يبلغ علوه 1600 متر تأثر عليه التعرية حيث يفقد من علوه 2cm(سنتمتر) كل سنة. وهذه المعطيات سجلت خلال سنة 2000 .
أكتب هده المعطيات على شكل متتالية . (أي تريض المعطيات)
ماهي السنة التي يصبح علو الجبل 1599متر؟.
نأخذ المتتالية $(v_n)_{n\geq 2000}$ حيث $v_{n+1}=v_n-2$ و $v_{2000}=160000=16\times10^4$.

02. مفردات: v_n تسمى متتالية حسابية أساسها $r=-2$

03. تعريف :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية . r عدد حقيقي غير منعدم .

نقول إن u_n متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} يعني إن $\forall n\geq n_0: u_{n+1}-u_n=r$.

04. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n = 2n+3; n\geq 0$. بين أن u_n متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

05. مفردات: $u_n = 2n+3$ الحد العام للمتتالية الحسابية u_n

v. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . لدينا : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$.

02. برهان :

بين على صحة الخاصية السابقة . (الاستدلال بالترجع)

ملاحظة : لدينا : $(n=p)$; $u_p = u_{n_0}+(p-n_0)r$ و $(n=q)$; $u_q = u_{n_0}+(q-n_0)r$. ومنه:

$$u_q = u_{n_0}+(q-n_0)r = u_{n_0}+(q-p+p-n_0)r = \underbrace{u_{n_0}+(p-n_0)r}_{u_p}+(q-p)r = u_p+(q-p)r$$

03. خاصية :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r لدينا: $\forall p,q \geq n_0 \;:\; u_q = u_p + (q-p)r$

04. أمثلة :

- مثال 1 : u_n متتالية حسابية أساسها r =3 وحدها $u_7 = 10$. أحسب u_{2007} .
- مثال 2 : متتالية حسابية أساسها r وحدها $u_0 = 5$ و $u_{100} = -45$. حدد r و u_n بدلالة n .

vi. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p \leq n$. لدينا :
>
> $$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{u_n+u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$$
>
> أو أيضا : أو أيضا : (عدد الحدود) × $S_n = \dfrac{(\text{le premier terme})+(\text{le dernier terme})}{2}$

02. ملاحظة :

$S_n = u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ هناك $n+1$ من الحدود

$S_n = u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$ هناك n من الحدود

$S_n = u_2+u_3+u_4+\dots+u_n$ هناك $n-1$ من الحدود

vii. متتالية هندسية :

01. نشاط : نأخذ النشاط المتعلق بقصة الشطرنج . لدينا: $\left(u_n = 2^{n-1}\right)_{n\in I}$.أوجد علاقة بين u_n و u_{n+1} .

02. مفردات : u_n تسمى متتالية هندسية أساسها q= 2 وحدها الأول $u_{n_0} = u_1 = 2^0 = 1$

03. تعريف :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية . q عدد حقيقي غير منعدم .
>
> نقول إن un متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول u_{n_0} يعني ان $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q\times u_n$

viii. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

01. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n = 2\times 5^n ; n \geq 0$. بين أن u_n متتالية هندسية وحدد عناصرها المميزة .

02. مفردات: $u_n = 2\times 5^n ; n \geq 0$ الحد العام للمتتالية الهندسية .

03. خاصية :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0}. لدينا : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$

04. برهان: بين على صحة الخاصية السابقة . (الاستدلال بالترجع) .

05. خاصية :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q . لدينا : $\forall p,q \geq n_0 \ : \ u_q = u_p \times q^{q-p}$

06. برهان :

برهان : $u_q = u_p \times q^{q-p} \Leftrightarrow u_q = \underbrace{u_{n_0} \times q^{p-n_0}}_{u_p} \times q^{q-p} \Leftrightarrow u_q = u_{n_0} \times q^{q-p+p-n_0} \Leftrightarrow u_q = u_{n_0} \times q^{q-n_0}$

07. تمرين :

ix. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

> $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0}. $n_0 \leq p \leq n$.
>
> 1) لدينا : مع $q \neq 1$:
> $$S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1}\right] \times u_p$$
>
> 2) لدينا : مع $q = 1$:
> $$S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p(n-p+1)$$

02. تمرين :

نأخذ قصة الحكيم والإمبراطور والشطرنج : نفترض أن كيلو غرام من القمح يعطي 2000 حبة من القمح .
نفترض أن قاطرة لقطار نقل البضائع سعة حمولتها هي 20 طن من القمح .
1) أوجد عدد حبات القمح التي طلبها الحكيم من الإمبراطور .
2) أوجد عدد قاطرات القمح التي يجب على الإمبراطور توفرها للحكيم .
3) هل طلب الحكيم كان بسيط حسب الإمبراطور ؟

x. المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : لثلاثة حدود متتابعة .

01. المعدل الحسابي.

$u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r .

لدينا : $u_i = u_{i+1} - r$ و $u_{i+2} = u_{i+1} + r$ ومنه : $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.

خلاصة : $a + b = 2c$ هذه العلاقة تسمى المعدل الحسابي .

02. المعدل الهندسي : إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على: $a\times c = b^2$ هذه العلاقة تسمى المعدل الهندسي.