# درس : الدوران في المستوى

## I. تذكير لبعض التحويلات الاعتيادية :

في هذا الدرس ننسب المستوى $(\mathcal{P})$ إلى م.م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر التطبيق f في $(\mathcal{P})$ ( أو التحويل f في $(\mathcal{P})$ ) يحول نقطة M من $(\mathcal{P})$ إلى نقطة 'M من $(\mathcal{P})$. أي :

$$f : (\mathcal{P}) \to (\mathcal{P}), \quad M \mapsto f(M) = M'$$

. حيث التحويل f يحقق العلاقة التالية :

### A. التحويل هو إزاحة: la translation ( العلاقة هي: $\overrightarrow{MM'}$ متجهة ثابتة )

#### 1. تعريف :

$\vec{u}$ متجهة معلومة ( ثابتة ) من المستوى $(\mathcal{P})$.

التطبيق f في $(\mathcal{P})$ ( أو التحويل f في $(\mathcal{P})$ ) الذي يحول نقطة M إلى نقطة 'M حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ يسمى إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ و نرمز له ب: $f = t_{\vec{u}}$.

إذن : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

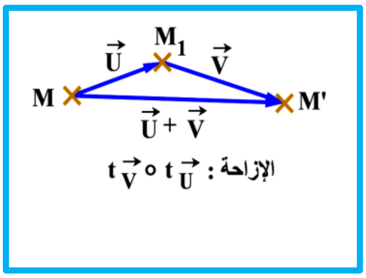
#### 2. خاصية:

$t_{\vec{u}}$ و $t_{\vec{v}}$ إزاحتين في المستوى $(\mathcal{P})$.

أ- $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ مركبة إزاحتين $t_{\vec{u}}$ و $t_{\vec{v}}$ هي إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ و نكتب $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

ب- $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

ج- كل إزاحة $t_{\vec{u}}$ في $(\mathcal{P})$ هي تقابل في $(\mathcal{P})$ و تقابلها العكسي هو $\left(t_{\vec{u}}\right)^{-1} = t_{-\vec{u}}$ .




#### 3. برهان :

* لتكن M نقطة من $(\mathcal{P})$ حيث : $t_{\vec{u}} : M \to t_{\vec{u}}(M) = M'$ مع $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ و $t_{\vec{v}} : M \to t_{\vec{v}}(M') = M''$ مع $\vec{v} = \overrightarrow{M'M''}$

إذن : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M) = t_{\vec{v}}\left(t_{\vec{u}}(M)\right) = t_{\vec{v}}(M') = M''$ مع $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u}+\vec{v}$ و منه $\overrightarrow{MM''}$ ثابتة .

خلاصة : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$.

- تقابل : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u} \Leftrightarrow t_{-\vec{u}}(M') = M$

### B. التحويل هو : تحاكي. l'homothétie ( العلاقة هي $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ )

#### 1. تعريف:

Ω نقطة معلومة من $(\mathcal{P})$ و $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ .

التطبيق f في $(\mathcal{P})$ ( أو التحويل f في $(\mathcal{P})$ ) يحول نقطة M إلى نقطة 'M حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ يسمى تحاكي مركزه Ω و نسبته k . نرمز للتحاكي ب : $h(\Omega,k)$.

إذن : $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

#### 2. خاصية :

$h(\Omega,k)$ هو تقابل في $(\mathcal{P})$ و تقابله العكسي هو $h^{-1}\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)$.

**3. ملحوظة :**

النقط : $A$ و $A'$ و $\Omega$ مستقيمية

- $k \in ]0,1[$ : لدينا $A' \in ]\Omega A[$ .
- $k \in ]1,+\infty[$ : لدينا $A' \in [\Omega A)$ و لكن خارج القطعة $[\Omega A]$ .
- $k \in ]-\infty,0[$ : لدينا $A' \in \,]A,\Omega)$ و لكن خارج القطعة $[\Omega A]$.

**C. التحويل هو تماثل محوري symétrie axiale : ( العلاقة هي $(D)$ واسط القطعة $[MM']$ )**

**1. تعريف :**

$(D)$ مستقيم معلوم من المستوى $(\mathcal{P})$.
التطبيق $f$ في $(\mathcal{P})$ ( أو التحويل $f$ في $(\mathcal{P})$ ) يحول نقطة $M$ إلى نقطة $M'$ حيث : $(D)$ واسط القطعة $[MM']$ يسمى تماثل محوري الذي محوره $(D)$ و نرمز له ب : $S_{(D)}$.
إذن : $S_{(D)}(M) = M'$ يكافئ $(D)$ واسط القطعة $[MM']$.

**2. خاصية :**

$S_{(D)}$ تقابل في المستوى $(\mathcal{P})$ و تقابله العكسي $S^{-1}$ هو $\left(S_{(D)}\right)^{-1} = S_{(D)}$. ( $S_{(D)} \circ S_{(D)} = Id_{(\mathcal{P})}$ )

**D. التماثل المركزي symétrie centrale : ( العلاقة هي $\Omega$ منتصف القطعة $[MM']$ )**

**3. تعريف :**

$\Omega$ نقطة معلوم من المستوى $(\mathcal{P})$.
التطبيق $f$ في $(\mathcal{P})$ ( أو التحويل $f$ في $(\mathcal{P})$ ) يحول نقطة $M$ إلى نقطة $M'$ حيث : $\Omega$ منتصف القطعة $[MM']$ يسمى تماثل مركزي الذي مركزه النقطة $\Omega$ و نرمز له ب : $S_{\Omega}$.
إذن : $S_{\Omega}(M) = M'$ يكافئ $\Omega$ منتصف القطعة $[MM']$.

**4. ملحوظة :**

$\Omega$ منتصف القطعة $[MM'] \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ .

$S_{\Omega} = h(\Omega,-1)$ هو التحاكي الذي مركزه $\Omega$ ونسبته $k=-1$ .

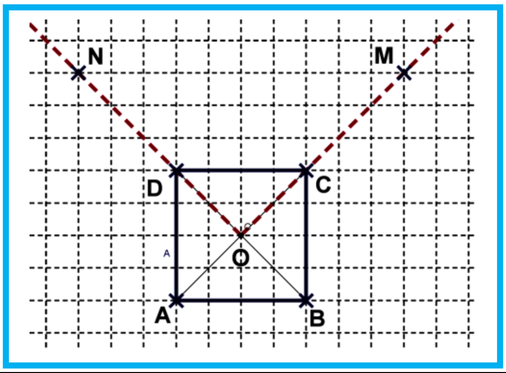
**5. خاصية :**

$S_{\Omega}$ تقابل في المستوى $(\mathcal{P})$ و تقابله العكسي $S^{-1}$ هو $(S_{\Omega})^{-1} = S_{\Omega}$. ( $S_{\Omega} \circ S_{\Omega} = Id_{(\mathcal{P})}$ )

## II. الدوران – الدوران العكسي:

### A. الدوران :

**1. نشاط :**




ننشئ مربع $(ABCD)$ مركزه $O$. $M$ و $N$ نقطتان من $(\mathcal{P})$ حيث :
$N \in [BO)$ و $M \in [AO)$ و $(OMN)$ مثلث متساوي الساقين في $O$ .
لنعتبر التطبيق $r$ في $(\mathcal{P})$ حيث: $r: A \to B \;;\; r: B \to C$
$r: D \to A \;;\; r: C \to D$ و $r: M \to N$

1. حسب ما سبق كيف ننشئ $N'$ حيث $r: N \to N'$.

**.2** حسب ما سبق أتمم التكافؤ الاتي : $r: N \to N' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{.......................} \\ \text{.......................} \end{cases}$

## .2 مفردات :

- $N'$ تسمى صورة النقطة.
- التطبيق $r$ يسمى الدوران الذي مركزه $O$ وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.
- النقطة $N'$ تسمى صورة النقطة $N$ بالدوران $r$ .

## .3 تعريف:

لتكن $O$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ الموجه توجيها مباشرا. $\alpha$ عدد حقيقي.

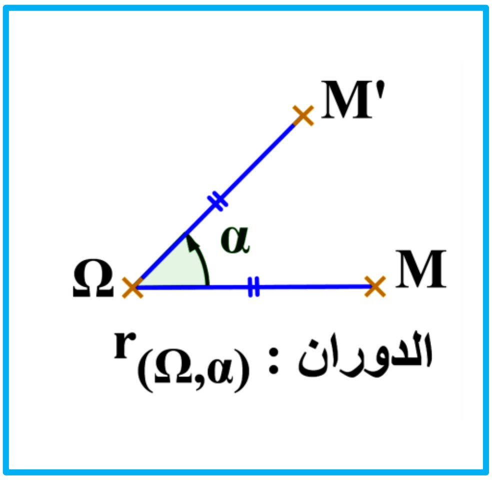
التطبيق $r$ في المستوى $(\mathcal{P})$ حيث يحول $M$ إلى $M'$ مع

- إذا كان $M = O$ فإن $M'=O$ . ( أي $M$ صامدة بالتطبيق $r$ )
- إذا كان $M \neq O$ . $M'$ تحقق ما يلي:

$OM = OM'$ و $(\overline{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \alpha \ (2\pi)$.

الدوران $r$ نرمز له ب : $r(O,\alpha)$

إذن : $r_{(\Omega,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases}$



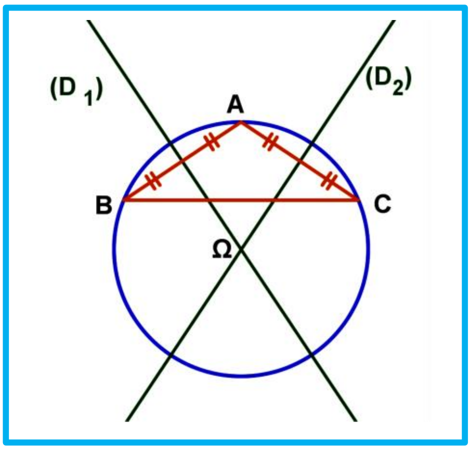

## .4 أمثلة :

- **مثال 1 :**

$ABC$ مثلث متساوي الساقين رأسه $A$ ونضع $(\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv \alpha \ [2\pi]$. ليكن الدوران $r$ حيث $r(B) = A$ و $r(A) = C$

حدد مركزه $\Omega$ و قياس زاويته $\beta$ .

جواب :




مركزه : لتكن $\Omega$ مركز الدوران $r$ .

بما أن: $r(B) = A$ إذن : $\Omega B = \Omega A$ و منه $\Omega$ تنتمي إلى $(D_1)$ واسط $[AB]$ .

بما أن: $r(A) = C$ إذن : $\Omega A = \Omega C$ و منه $\Omega$ تنتمي إلى $(D_2)$ واسط $[AC]$ .

و منه : $\Omega$ هي تقاطع الواسطين $(D_1)$ و $(D_2)$. نعلم أن واسطات مثلث تتلاقى.

خلاصة 1: $\Omega$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$.

زاويته :

لدينا: $r(B) = A \Rightarrow (\overline{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}}) \equiv 2(\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv 2\alpha \ [2\pi]$

خلاصة 2: $2\alpha$ هو قياس لزاوية الدوران $r$ .

خلاصة : الدوران $r$ مركزه $\Omega$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ و قياس زاويته $2\alpha$ أي $r(\Omega, 2\alpha)$ .

- **مثال 2 :**

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م. م. م. م $(O,\vec{i},\vec{j})$ . نعتبر النقطتين $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

.1 لنعتبر الدوران $r(O,\alpha)$ . حدد $\alpha$ قياس زاوية الدوران $r$ حيث يحول $A$ إلى $B$.

جواب :

.1 نحدد $\alpha$ قياس زاوية الدوران حيث $O$ مركز الدوران:

لدينا : $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}}{1\times1}=\dfrac{1}{2}$ و $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{1\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{1}{2}$ و $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ .

خلاصة : قياس زاوية الدوران هو $\dfrac{\pi}{6}$ .

- مثال 3 :

نعتبر التطبيق $f:\ \begin{array}{l}(\mathcal{P})\to(\mathcal{P})\\ M(x,y)\mapsto f(M)=M'(x',y')\end{array}$ حيث : $\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}$ .

1. بين أن $f$ له نقطة صامدة واحدة فقط حددها $O$ .
2. أ - قارن : $OM=OM'$ . ب – حدد قياسات الزاوية الموجهة : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)$ .
3. استنتج : طبيعة التطبيق $f$ .

جواب :

1. نحدد النقط الصامدة :

$M(x,y)$ نقطة من $(\mathcal{P})$ صامدة إذن $f(M)=M$ إذن $\begin{cases}x=x'\\ y=y'\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x=x'=-y\\ y=y'=x\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-y\\ y=x\end{cases}$ أي $x=y=-y$ و بالتالي $x=y=0$ .

خلاصة : $O(0,0)$ هي النقطة الصامدة الوحيدة.

2. أ – نقارن : $OM=OM'$.

$OM=\sqrt{x^2+y^2}$ و $OM'=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{(-y)^2+x^2}=\sqrt{y^2+x^2}$ ومنه : $OM=OM'$ . $(1)$

ب – نحدد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)$ .

لدينا: $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}}{x^2+y^2}=1$

$$\cos\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}=\dfrac{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}}{x^2+y^2}=0$$

ومنه $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=1$ و $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=0$ إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ . $(2)$

خلاصة : قياس زاوية الدوران هو $\dfrac{\pi}{2}$ .

3. طبيعة التحويل : حسب $(1)$ و $(2)$ نستنتج أن التطبيق $f$ هو دوران $r\left(O,\dfrac{\pi}{2}\right)$

**5. ملاحظة:**

- $r(\Omega,\alpha)$ دوران من المستوى $(\mathcal{P})$ لدينا $r(\Omega)=\Omega$ إذن O صامدة بالدوران $r$.$r(\Omega,\alpha)$.
- $r(M)=M'$ إذن $\Omega M=\Omega M'$ ومنه المركز $\Omega$ ينتمي إلى واسط القطعة $[MM']$ .
- $r(\Omega,\alpha)$ دوران حيث $\alpha=0$ لدينا لكل M من $(\mathcal{P})$: $r(M)=M$ جميع نقط $(\mathcal{P})$ صامدة ب $r$.
r يسمى التطبيق المطابق في $(\mathcal{P})$. إذن : $r(\Omega,\alpha=0)=Id_{(\mathcal{P})}$
- $r(\Omega,\alpha)$ دوران حيث : $\alpha=\pi$ هو التماثل المركزي الذي مركزه $\Omega$ أي $r(\Omega,\pi)=S_\Omega$

## B. الدوران العكسي :

### 1. خاصية و تعريف :

الدوران $r(\Omega,\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في $(\mathcal{P})$ وتقابله العكسي $r^{-1}$ هو $r^{-1}=r(\Omega,-\alpha)$ . الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $-\alpha$.
و هو يسمى الدوران العكسي للدوران r .
إذن : $r(M)=M'\Leftrightarrow r^{-1}(M')=M$

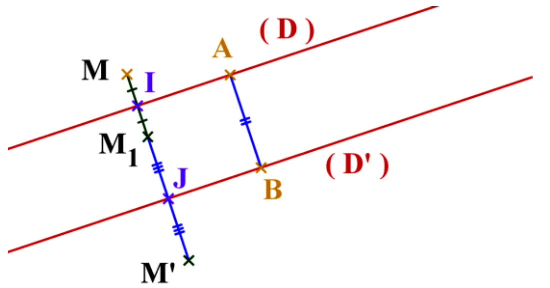
### 2. برهان :

لتكن M نقطة من $(\mathcal{P})$ .
لدينا :

$$r_{(\Omega,\alpha)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)\equiv\alpha\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}}\right)\equiv-\alpha\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow r_{(\Omega,-\alpha)}(M')=M\Leftrightarrow r_{(\Omega,-\alpha)}=r^{-1}$$

## III. مركب تماثلين محوريين $S_{(D)}$ و $S_{(D')}$ :

### 1. مركب تماثلين محوريين $S_{(D)}$ و $S_{(D')}$ :



$(D)\|(D')$ مركب تماثلين محوريين مع $S_{D'}\circ S_D$

**أ- حالة 1 :** $(D)$ و $(D')$ متوازيان : $[(D')\|(D)]$ .

نعتبر $(D)$ و $(D')$ مستقيمين متوازيين قطعا.
نعتبر نقطة A من المستقيم $(D)$ و B المسقط العمودي ل A على $(D')$.
لتكن M نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث :

$$S_{(D)}:M\to M_1 \text{ و } S_{(D')}:M_1\to M'$$

و منه : $S_{(D')}\circ S_{(D)}:M\xrightarrow{S_{(D)}}M_1\xrightarrow{S_{(D')}}M'$

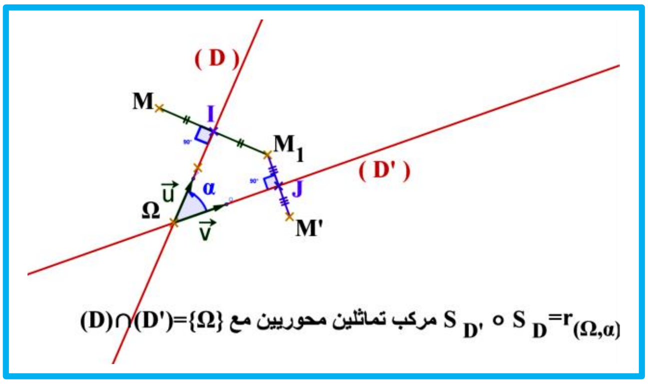
نعتبر I و J منتصفي $[MM_1]$ و $[M_1M']$ .
من جهة أخرى : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M'}=2\overrightarrow{IM_1}+2\overrightarrow{M_1J}=2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AB}$.
المتجهة $2\overrightarrow{AB}$ ثابتة إذن المتجهة $\overrightarrow{MM'}$ ثابتة ومنه التحويل $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ هو إزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AB}$.
خلاصة : $S_{(D')}\circ S_{(D)}=t_{2\overrightarrow{AB}}$

**ب- حالة 2 :** $(D)$ و $(D')$ متقاطعان: $[(D')\cap(D)=\{\Omega\}]$

نعتبر $(D)$ و $(D')$ مستقيمين متقاطعين في $\Omega$ و موجهين على التوالي ب : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ . M نقطة من $(\mathcal{P})$ و $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)\equiv\alpha\ [2\pi]$

- حالة $M=\Omega$ : إذن $S_{(D')}\circ S_{(D)}(\Omega)=\Omega$ .

▪ حالة $M \neq \Omega$ : نضع $S_{(D)} : M \to M_1$ و $S_{(D')} : M_1 \to M'$ .




لدينا :

1- $\Omega M = \Omega M_1 = \Omega M'$.

2- $\overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1})} + \overline{(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M'})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\overline{(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega M_1})} + 2\overline{(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega J})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\overline{(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega J})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\overline{(\vec{u},\vec{v})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\alpha\ [2\pi]$

و بالتالي : $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ هو الدوران الذي مركزه $\Omega$ و قياس زاويته $2\overline{(\vec{u},\vec{v})}$ .

**2. خاصية :**

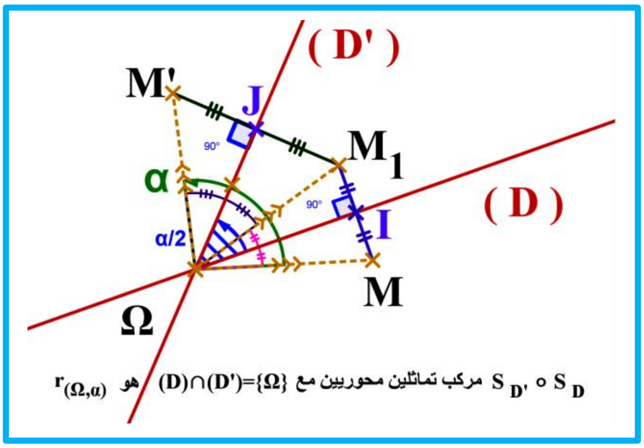
نعتبر $(D)$ و $(D')$ مستقيمين من المستوى $(\mathcal{P})$ موجهين على التوالي ب : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ .

أ- إذا كان : $(D) \parallel (D')$ فإن التحويل $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ هو إزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AB}$ . حيث $A \in (D)$ و $B$ المسقط العمودي ل $A$ على $(D')$

ب- إذا كان : $(D) \cap (D') = \{\Omega\}$ فإن التحويل $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ هو الدوران الذي مركزه $\Omega$ و قياس زاويته $2\times\overline{(\vec{u},\vec{v})} = 2\alpha$ .

## IV. تفكيك دوران إلى مركب تماثلين محوريين:

**1. نشاط :**




نعتبر دوران $r(\Omega,\alpha)$ و $(D)$ مستقيم من $(\mathcal{P})$ يمر من $\Omega$ .

كيف نختار مستقيم $(D')$ حيث $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r(\Omega,\alpha)$ ؟

جواب :

نختار $(D')$ حيث $(D')$ يمر من $\Omega$ و $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\alpha}{2}\ [\pi]$.

و منه : $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r\left(\Omega, 2\times\frac{\alpha}{2}\right) = r(\Omega,\alpha)$.

**2. خاصية :**

كل دوران $r(\Omega,\alpha)$ يمكن كتابته على شكل مركب تماثلين محوريين $S_{(D)}$ و $S_{(D')}$ حيث : $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r(\Omega,\alpha)$ مع $(D)$ و $(D')$ مستقيمين من المستوى $(\mathcal{P})$ موجهين على التوالي ب : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $(D) \cap (D') = \{\Omega\}$ و $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\alpha}{2}\ [\pi]$.

## V. خاصيات الدوران

**1. نشاط :**

كيف نستنتج خاصيات الدوران ؟ ثم أذكر هذه الخاصيات.

جواب :

نستنتج خاصيات الدوران من خلال أن الدوران هو مركب تماثلين محوريين. نعلم بأن التماثل المحوري يحافظ : المسافات – التعامد ......

- إذن الدوران يحافظ على المسافات – قياس الزوايا - التوازي – التعامد – معامل الإستقامية –
- إذن الدوران يحافظ على صور الأشكال الهندسية ( صورة مستقيم هي مستقيم .... )

بالتالي نستنتج الخاصيات التالية :

## 2. خاصيات :

$r(O,\alpha)$ دوران من المستوى $(\mathcal{P})$.مع A و B و C و D و G نقط من (P) و A' و B' و C' و D' و G' صورهما على التوالي ب r

- صورة القطعة $[AB]$ ب r هي القطعة $[A'B']$ والقطعتين متقايستين .الدوران يحافظ على المسافات.

كل تطبيق في $(\mathcal{P})$ يحافظ على المسافات فهو يسمى تقايس Isométrie في المستوى. ( أمثلة : إزاحة – تماثل محوري و مركزي – دوران) في الحالة الأخرى فهو يسمى تشابه Similitude . ( مثال : التحاكي ).

- يحافظ على المرجح :صورة G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$ هي G' مرجح النظمة المتزنة $\{(A',a),(B',b)\}$ . ( أو لثلاثة نقط متزنة أو لأربع نقط متزنة أو ....).

كل تطبيق في $(\mathcal{P})$ يحافظ على المرجح فهو يسمى تطبيق تآلفي Affine .

- الدوران يحافظ على الأشكال الهندسية .
  - صورة نصف مستقيم $[A,B)$ ب r هي نصف المستقيم $[A',B')$
  - صورة المستقيم $(AB)$ ب r هو المستقيم $(A'B')$ .
  - صورة الدائرة $C(A,r)$ ب r هي الدائرة $C'(A',r)$
- الدوران r يحافظ على التوازي: $(AB)\|(\Delta)$ لدينا $(A'B')\|(\Delta')$ .
- الدوران r يحافظ على التعامد : $(AB)\perp(\Delta)$ لدينا $(A'B')\perp(\Delta')$.
- يحافظ على الإستقامية و على معامل الإستقامية
  - صورة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ب r هي $\overrightarrow{A'B'}$.
  - إذا كان $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$
- الدوران يحافظ على الزوايا الموجهة :لدينا : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha(2\pi)$.
  - صورة الزاوية $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ ب r هي الزاوية $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)$ و $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)}\equiv\overline{\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)}\ [2\pi]$

# VI. مركب دورانين :

## 1. خاصية :

$r_1(\Omega_1,\alpha_1)$ و $r_2(\Omega_2,\alpha_2)$ دورانان من المستوى $(\mathcal{P})$.

أ- $r_1$ و $r_2$ لهما نفس المركز $\Omega_1=\Omega_2$ :

التحويل $r_2\circ r_1$ هو دوران مركزه $\Omega=\Omega_2=\Omega_1$ و قياس زاويته هي $\alpha=\alpha_2+\alpha_1$.

إذن : $r_2\circ r_1=r(\Omega_1,\alpha_1+\alpha_2)$ .

ب- $r_1$ و $r_2$ ليس لهما نفس المركز $\Omega_1\neq\Omega_2$ :

- إذا كان : $\alpha_2+\alpha_1=2k\pi$ , $(k\in\mathbb{Z})$ فإن التحويل $r_2\circ r_1$ هو إزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_1'}$ مع $r_2(\Omega_1)=\Omega_1'$
- إذا كان : $\alpha_2+\alpha_1\neq 2k\pi$ , $(k\in\mathbb{Z})$ فإن التحويل $r_2\circ r_1$ هو دوران مركزه $\Omega$ و قياس زاويته هي $\alpha=\alpha_2+\alpha_1$.

مع $(D)=(\Omega_2\Omega_1)$ (المستقيم المار من المركزين $\Omega_1$ و $\Omega_2$) و $r_1=S_{(D)}\circ S_{(D_1)}$ و $r_2=S_{(D_2)}\circ S_{(D)}$ و $(D_1)\cap(D_2)=\{\Omega\}$ .

## 2. برهان :

أ- حالة أ :

لتكن $M$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ نضع : $r_1(\Omega_1,\alpha_1) : M \to M_1$ و $r_2(\Omega_2,\alpha_2) : M_1 \to M'$.

لدينا :

1. $\Omega_1 M_1 = \Omega_1 M$ و $\Omega_2 M' = \Omega_2 M_1$ .
2. $\overline{(\overrightarrow{\Omega_1 M},\overrightarrow{\Omega_1 M'})} \equiv \overline{(\overrightarrow{\Omega_1 M},\overrightarrow{\Omega_1 M_1})} + \overline{(\overrightarrow{\Omega_1 M_1},\overrightarrow{\Omega_1 M'})} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \ [2\pi]$

التحويل $r_2 \circ r_1$ هو دوران مركزه $\Omega = \Omega_2 = \Omega_1$ و قياس زاويته هي $\alpha = \alpha_2 + \alpha_1$.

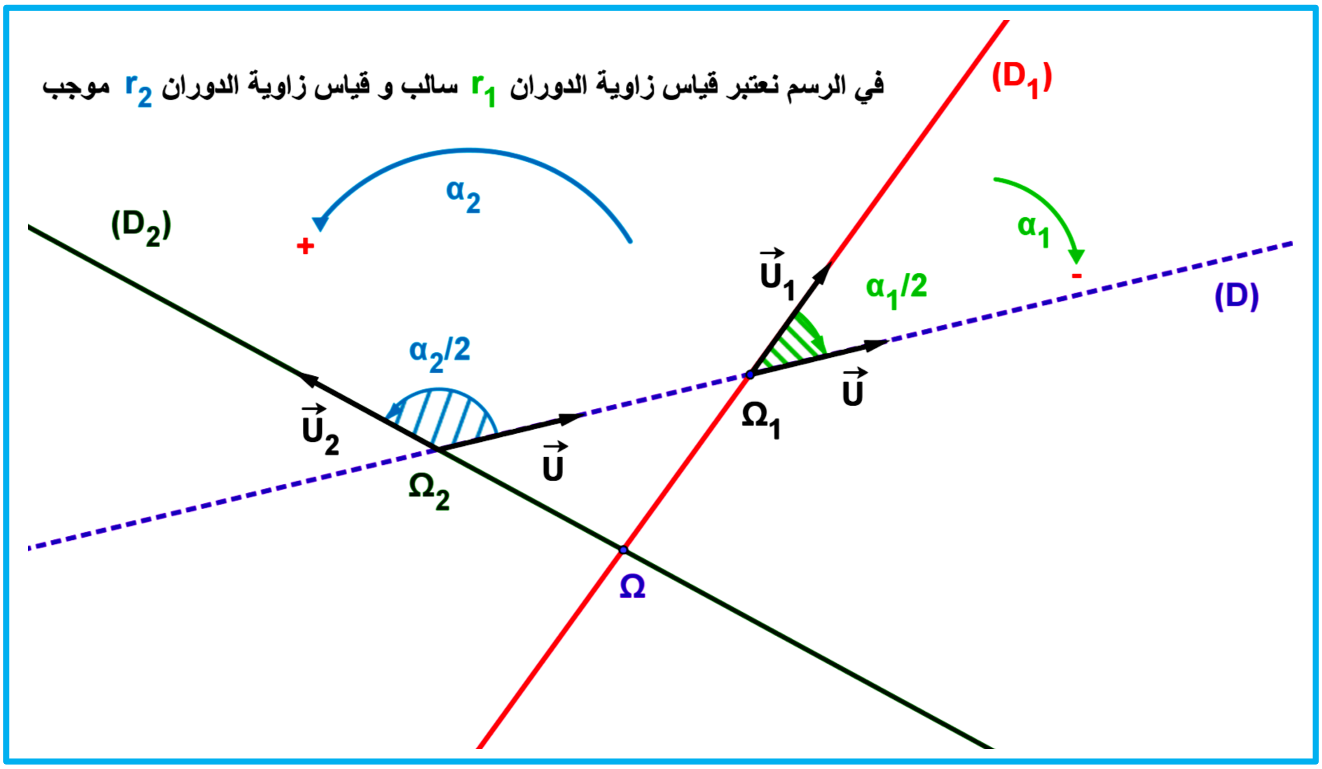
إذن : $r_2 \circ r_1 = r(\Omega_1, \alpha_1 + \alpha_2)$ .

ب- $r_1$ و $r_2$ ليس لهما نفس المركز $\Omega_2 \neq \Omega_1$:

ليكن $(D) = (\Omega_2 \Omega_1)$ ( المستقيم المار من المركزين $\Omega_1$ $\Omega_2$ )

و نعتبر $r_1 = S_{(D)} \circ S_{(D_1)}$ و $r_2 = S_{(D_2)} \circ S_{(D)}$ و $(D_1) \cap (D_2) = \{\Omega\}$ .

حيث : $\left\{\begin{array}{l} (D) \cap (D_1) = \{\Omega_1\} \\ \overline{(\vec{u_1},\vec{u})} \equiv \dfrac{\alpha_1}{2} \ [\pi] \end{array}\right.$ و $\left\{\begin{array}{l} (D) \cap (D_2) = \{\Omega_2\} \\ \overline{(\vec{u},\vec{u_2})} \equiv \dfrac{\alpha_2}{2} \ [\pi] \end{array}\right.$




$r_2 \circ r_1 = \left(S_{(D_2)} \circ S_{(D)}\right) \circ \left(S_{(D)} \circ S_{(D_1)}\right) = S_{(D_2)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D_1)} = S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ ( تركيب تطبيقات تجمعي ).

$\overline{(\vec{u_1},\vec{u_2})} \equiv \overline{(\vec{u_1},\vec{u})} + \overline{(\vec{u},\vec{u_2})} \equiv \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \ [\pi]$ .

- حالة 1 : $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ . ومنه : $\overline{(\vec{u_1},\vec{u_2})} \equiv 0 \ [\pi]$ إذن $(D_1) \parallel (D_2)$ و منه التحويل $r_2 \circ r_1$ هو إزاحة .
- حالة 2 : $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ .

$\overline{(\vec{u_1},\vec{u_2})} \not\equiv 0 \ [\pi]$ إذن $(D_1) \cap (D_2)$ متقاطعان نأخذ نقطة تقاطعهما هي $\Omega$ $\left((D_1) \cap (D_2) = \{\Omega\}\right)$ و منه التحويل $r_2 \circ r_1$ هو دوران مركزه $\Omega$ و قياس زاويته $\alpha$ حيث $\alpha = \alpha_2 + \alpha_1$