

.01

1. ما هو PGCD لعددين صحيحين طبيعيين متتابعين ؟ مغللا جوابك .
2. باستعمال تاليفة خطية ل $2n+1$ و $3n+2$ استنتج $\text{PGCD}(3n+2, 2n+1)$.
3. باستعمال خوارزمية إقليدس بين أن العددين 567 و 2854 أوليين فيما بينهما .
4. باستعمال حسابات السؤال السابق استنتج عددين صحيحين نسبيين x و y حيث $567x + 2854y = 1$.

.02

- لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 5$ نعتبر العددين $a = n^3 - n^2 - 12n$ و $b = 2n^2 - 7n - 4$.
1. بعد تعميل a و b بين أنهما يقبلان القسمة على $n-4$.
 2. نضع $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ و $d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$.
 - أ. أوجد علاقة بين α و β غير مرتبطة ب n .
 - ب. بين أن d قاسم ل 5 .
 - ج. بين أن α و β مضاعفين ل 5 إذا فقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .
 3. بين أن $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما .
 4. ..
 - أ. حدد $\text{PGCD}(a, b)$ بدلالة n و ذلك تبعا لقيم n .
 - ب. تحقق على النتيجة بالنسبة ل $n = 11$ ثم ل $n = 12$.

.03

1. ثلاثة أعداد صحيح طبيعية متتابعة بين أن مجموع مكعباتها دائما يقبل القسمة على 9 .
2. أوجد جميع الأزواج (a, b) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حيث $a \wedge b = 13$ و $a + b = 182$.

.04

1. n من \mathbb{N} ؛ تبعا لقيم n أوجد باقي القسمة ل 5^n على 13 .
2. استنتج بأن $8 - 2007^{2015}$ يقبل القسمة على 13 .
3. بين أن : لكل n من \mathbb{N}^* العدد $18^{4n-1} + 31^{4n+1}$ يقبل القسمة على 13 .

.05

1. أحسب باقي القسمة الاقليدية ل 3^n على 7 مع من أجل $1 \leq n \leq 6$.
2. بدون استعمال التراجع بين أن لكل n من \mathbb{N} لدينا : 7 تقسم $3^{n+6} - 3^n$. استنتج أن 3^{n+6} و 3^n لهما نفس الباقي بالقسمة على 7 .
3. ما هو باقي القسمة ل 3^{1000} على 7 ؟
4. بصفة عامة كيف نحصل على باقي القسمة ل 3^n على 7 لكل n من \mathbb{N} ؟
5. نضع $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$ لكل n من \mathbb{N} و $n \geq 2$.
 - أ- بين أن $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. ب- ما هي قيم n حيث u_n تقبل القسمة على 7 ؟ ج- ما هي القواسم الموجبة ل u_6 ؟



1. PGCD لعددين صحيحين طبيعيين متتابعين (معللا جوابك)

نعتبر n و $n+1$ عددين متتابعين و d قاسم موجب ل n و $n+1$ إذن d قاسم لفرقيهما أي d يقسم $(n+1)-n=1$ ومنه : $d=1$ و بالتالي $PGCD(n,n+1)=1$ (وهذا يذكرنا بالواجب الأول السؤال : استدل بالخلف على ما يلي : إذا كان العدد q يقسم العدد n إذن q لا يقسم $n+1$).

ومنه : $PGCD(n,n+1)=1$

2. باستعمال تأليفة خطية ل $2n+1$ و $3n+2$ استنتج $PGCD(3n+2,2n+1)$.

لنعتبر d قاسم مشترك ل $2n+1$ و $3n+2$.

$$\left. \begin{array}{l} d \mid (3n+2) \\ d \mid (2n+1) \end{array} \right\} \Rightarrow d \mid [2(3n+2) - 3(2n+1)] \Rightarrow d \mid 1 : \text{إذن :}$$

(تأليفة خطية ل $2n+1$ و $3n+2$)

ومنه : $PGCD(3n+2,2n+1)=1$

3. باستعمال خوارزمية إقليدس بين أن العددين 567 و 2854 أوليين فيما بينهما.

طريقة تطبيق خوارزمية إقليدس لحساب $pgcd(a,b)$ مع : $a=567$ و $b=2854$ (109 عدد أولي).

$$2854 = 567 \times 5 + 19 \quad (r_1 = 19)$$

✓ ✓

$$567 = 19 \times 29 + 16 \quad (r_2 = 16)$$

✓ ✓

$$19 = 16 \times 1 + 3 \quad (r_3 = 3)$$

✓ ✓

$$16 = 3 \times 5 + 1 \quad (r_4 = 1) ; (PGCD(2854,567) = 1)$$

✓ ✓

$$3 = 1 \times 3 + 0 \quad (r_5 = 0)$$

خلاصة : $PGCD(2854,567) = 1$

4. باستعمال حسابات السؤال السابق استنتج عددين صحيحين نسبيين x و y حيث $567x + 2854y = 5$.



$a = 2854$ و $b = 567$		طريقة تحديد معاملي بيزو
<p>نضع :</p> $2854 = \boxed{567} \times 5 + \boxed{19} \quad (r_1 = 19)$ $\boxed{567} = \boxed{19} \times 29 + \boxed{16} \quad (r_2 = 16)$ $\boxed{19} = \boxed{16} \times 1 + \boxed{3} \quad (r_3 = 3)$ $\boxed{16} = \boxed{3} \times 5 + \boxed{1} \quad (r_4 = 1)$ $\boxed{3} = \boxed{1} \times 3 + \boxed{0} \quad (r_5 = 0)$		$1 = 567 \times 6 + 19 \times (-179)$ $= 567 \times 6 + \left(\frac{2854 - 567 \times 5}{19} \right) \times (-179)$ $= 567 \times 901 + 2854 \times (-179)$ $1 = 19 \times (-5) + \left(\frac{567 - 19 \times 29}{16} \right) \times 6$ $= 567 \times 6 + 19 \times (-179)$ $1 = 16 - \left(\frac{19 - 16 \times 1}{3} \right) \times 5 = 19 \times (-5) + 16 \times 6$ $1 = 16 - 3 \times 5$

خلاصة : معاملي بيزو هما $x = 901$ و $y = -179$ أي $567 \times 901 + 2854 \times (-179) = 1$

1. بعد تعميل a و b بين أنهما يقبلان القسمة على $n-4$.
لدينا :

$$a = n^3 - n^2 - 12n = n(n^2 - n - 12) = n(n^2 - 16 - n + 4) = n(n-4)(n+4-1) = n(n-4)(n+3) \quad \bullet$$

ومنه : $(n-4) \mid a$

$$b = 2n^2 - 7n - 4 = 2n^2 - 32 - 7n + 28 = 2(n^2 - 16) - 7(n-4) = (n-4)[2(n+4) - 7] = (n-4)(2n+1) \quad \bullet$$

ومنه : $(n-4) \mid b$

2. أوجد علاقة بين α و β غير مرتبطة ب n .

لدينا : $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ إذن : $\alpha = 2n+1 = 2n+6-5 = 2(n+3)-5 = 2\beta-5$

ومنه : علاقة بين α و β غير مرتبطة ب n هي : $\alpha = 2\beta - 5$

ب. بين أن : d قاسم ل 5 .
من خلال :

$d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$ إذن : $d \mid \alpha$ و $d \mid \beta$ ومنه : $d \mid (2\beta - \alpha)$ (1) (تأليفة خطية ل α و β)

$\alpha = 2\beta - 5$ نحصل على $2\beta - \alpha = 5$ (2)

من خلال (1) و (2) نحصل على $d \mid 5$.

ومنه : $d \mid 5$ أي $d = 1$ أو $d = 5$ أو أيضا : $5 = d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$ أو $1 = d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$

ج. بين أن α و β مضاعفين ل 5 إذا فقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .



⇒ نبين الاستلزام المباشر :

• لدينا : $n-2$ مضاعف ل 5 أي $5 \mid (n-2)$ ومنه : $5 \mid ((n-2)+5)$ أي $5 \mid (n+3)$ ومنه : $5 \mid \beta$.

• لدينا : $n-2$ مضاعف ل 5 أي $5 \mid (n-2)$ ومنه : $5 \mid 2(n-2)$ ومنه $5 \mid (2(n-2)+5)$ ومنه : $5 \mid (2n+1)$ أي $5 \mid \alpha$

و بالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

← نبين الاستلزام العكسي :

• لدينا : α و β مضاعفين ل 5 ومنه $5 \mid \alpha$ و $5 \mid \beta$ إذن : $5 \mid (\alpha - \beta)$ أي $5 \mid (2n+1 - (n+3))$ ومنه : $5 \mid (n-2)$.

و بالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

ومنه : α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .

3. نبين أن : $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما .

لنعتبر δ قاسم مشترك موجب ل $2n+1$ و n إذن : $\delta \mid (2n+1)$ و $\delta \mid n$ ومنه $\delta \mid ((2n+1) - n)$ (تأليفة خطية ل $2n+1$ و n)

و منه : $\delta \mid 1$ إذن $\delta = 1$ أي $1 = \text{PGCD}(2n+1, n)$

ومنه : $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما . (أي

4. ..

أ. حدد $\text{PGCD}(a, b)$ بدلالة n وذلك تبعا لقيم n .

• لدينا : $a = n^3 - n^2 - 12n = n(n-4)(n+3)$ و $b = 2n^2 - 7n - 4 = (n-4)(2n+1)$

ومنه :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(n(n-4)(n+3), (n-4)(2n+1))$$

$$= (n-4) \text{PGCD}(n(n+3), (2n+1))$$

$$= (n-4) \text{PGCD}(n\beta, \alpha)$$

$$= (n-4) \text{PGCD}(\beta, \alpha) \quad ; \quad (n \wedge \alpha) = 1$$

من جهة أخرى : $1 = d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$ أو $5 = d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$

حالة : $5 = d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$

حسب ما سبق : α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .

أي : α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2 = 5k$ مع $k \in \mathbb{N}$ (أي $n = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$)

إذن : إذا كان $n = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن : $\text{PGCD}(a, b) = (n-4) \times 5$

إذن : إذا كان $n \neq 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن : $\text{PGCD}(a, b) = (n-4) \times 1 = n-4$

ومنه :

إذا كان $n = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن : $\text{PGCD}(a, b) = (n-4) \times 5$

إذا كان $n \neq 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن : $\text{PGCD}(a, b) = (n-4) \times 1 = n-4$

تحقق على النتيجة بالنسبة ل $n = 11$ ثم ل $n = 12$.

بالنسبة ل $n = 11$ لدينا $n = 11 = 2 \times 5 + 1$ إذن $n \neq 5k + 2$ ومنه : $\text{PGCD}(a, b) = n - 4$ أي

$$\text{PGCD}(1078, 161) = 11 - 4 = 7$$

بالنسبة ل $n = 12$ لدينا $n = 12 = 2 \times 5 + 2$ إذن $n = 5k + 2$ ومنه : $\text{PGCD}(a, b) = (n-4) \times 5$ أي

$$\text{PGCD}(1440, 200) = (12-4) \times 5 = 40$$

خلاصة :



• بالنسبة ل $n = 11$ لدينا $PGCD(a,b) = PGCD(1078,161) = 11 - 4 = 7$

• بالنسبة ل $n = 12$ لدينا $PGCD(a,b) = PGCD(1440,200) = (12 - 4) \times 5 = 40$

1. نعتبر الأعداد الصحيحة الطبيعية المتتالية التالية : n و $n+1$ و $n+2$

مكعباتها هي : n^3 و $(n+1)^3$ و $(n+2)^3$

ومنه مجموع مكعباتها هو : $(1) \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 9(n^2 + 1) + 3n(n^2 + 5)$

لدينا : $(2) \quad 9(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{9}$ أي $[9]$

إذن يكفي أن نبين أن : $3n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{9}$ أو أيضا نبين أن $n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3}$.

حالة 1 : $[3] \quad n \equiv 0$ إذن $[3] \quad n(n^2 + 5) \equiv 0$

حالة 2 : $[3] \quad n \equiv 1$ إذن $[3] \quad n^2 \equiv 1$ ومنه : $[3] \quad (n^2 + 5) \equiv 6 \equiv 0$ وبالتالي $[3] \quad n(n^2 + 5) \equiv 0$

حالة 3 : $[3] \quad n \equiv 2$ إذن $[3] \quad n^2 \equiv 4 \equiv 1$ ومنه : $[3] \quad (n^2 + 5) \equiv 6 \equiv 0$ وبالتالي $[3] \quad n(n^2 + 5) \equiv 0$

ومنه لكل n من \mathbb{N} لدينا $[3] \quad n(n^2 + 5) \equiv 0$ إذن $[9] \quad 3n(n^2 + 5) \equiv 0$ (3)

من خلال : (1) و (2) و (3) نحصل على $[9] \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \equiv 0$

خلاصة : مجموع مكعبات 3 أعداد صحيح طبيعية متتالية دائما يقبل القسمة على 9.

2. أوجد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حيث $a \wedge b = 13$ و $a + b = 182$

$$\left. \begin{array}{l} a \wedge b = 13 \\ a + b = 182 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13a', b = 13b', PGCD(a', b') = 1 \\ 13(a' + b') = 182 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 13a', b = 13b', PGCD(a', b') = 1 \\ a' + b' = 14 \end{cases}$$

بما أن : $PGCD(a', b') = 1$ و $a' + b' = 14$ إذن a' و b' لهما نفس الزوجية و بالضبط فرديين .

لتحديد a' و b' نعتبر الجدول التالي :

a'	1	3	5	$\begin{array}{c} \diagdown \\ 7 \\ \diagup \end{array}$	9	11	13
b'	13	11	9	$\begin{array}{c} \diagup \\ 7 \\ \diagdown \end{array}$	5	3	1
$13a'$	13	39	65	PGCD	117	143	169
$13b'$	169	143	117	$(7,7) \neq 1$	65	39	13

من خلال الجدول الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حيث : $a \wedge b = 13$ و $a + b = 182$ هي :

. $(13,169)$ و $(39,143)$ و $(65,117)$ و $(169,13)$ و $(143,39)$ و $(117,65)$.



لدينا : $5^1 \equiv 5 \pmod{13}$ و $5^2 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$ ومنه $(5^2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{13}$ أي $5^4 \equiv 1 \pmod{13}$.
وبالتالي : لكل n من \mathbb{N} يكتب على شكل $n = 4k + r$ مع $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ و $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{إذن : } 5^n = 5^{4k+r} = (5^4)^k \times 5^r$$

$$5^4 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (5^4)^k \equiv 1^k \pmod{13}$$

$$\Rightarrow (5^4)^k \times 5^r \equiv 1^k \times 5^r \pmod{13} \quad \text{إذن :}$$

$$\Rightarrow 5^{4k+r} \equiv 5^r \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 5^n \equiv 5^r \pmod{13}$$

$$\text{ومنه : } 5^n \equiv 5^r \pmod{13}$$

ومنه:

$$\bullet \text{ إذا كان : } r = 0 \text{ فإن } 5^n \equiv 5^0 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\bullet \text{ إذا كان : } r = 1 \text{ فإن } 5^n \equiv 5^1 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$\bullet \text{ إذا كان : } r = 2 \text{ فإن } 5^n \equiv 5^2 \equiv 12 \pmod{13}$$

$$\bullet \text{ إذا كان : } r = 3 \text{ فإن } 5^n \equiv 5^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

خلاصة : باقي القسمة الممكن ل 5^n على 13 هم 1 أو 5 أو 12 أو 8 .
2. استنتج بأن $2007^{2015} - 8$ يقبل القسمة على 13 .

$$\text{لدينا : } 2007 = 154 \times 13 + 5 \quad \text{إذن :}$$

$$2007 \equiv 5 \pmod{13} \Rightarrow 2007^{2015} \equiv 5^{2015} \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv 5^{503 \times 4 + 3} \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv (5^4)^{503} \times 5^3 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv (1)^{503} \times 5^3 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv 5^3 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv 8 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2007^{2015} - 8 \equiv 0 \pmod{13}$$

ومنه : $2007^{2015} - 8$ يقبل القسمة على 13 .

3. بين أن : لكل n من \mathbb{N}^* العدد $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .

$$\text{لدينا : } 31 \equiv 5 \pmod{13} \text{ و } 18 \equiv 5 \pmod{13} \text{ إذن : } 31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} \pmod{13} \text{ و } 18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} \equiv 5^{4(n-1)+3} \pmod{13}$$

$$\text{إذن : } 31^{4n+1} \equiv 5 \pmod{13} \text{ و } 18^{4n-1} \equiv 5^{4k+3} \equiv 5^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$\text{إذن : } 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5 + 8 \pmod{13}$$

$$\text{إذن " } 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0 \pmod{13}$$

خلاصة : لكل n من \mathbb{N}^* العدد $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .