

## تمارين حول الحسابيات

الاولى سلك بكالوريا علوم رياضية

## تمارين و حلول

- تمرين 1** ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا  
 1- بين أن 8 يقسم  $n^2 - 1$  لكل عدد صحيح طبيعي فردي  $n$   
 2- بين لكل  $n$  من العدد  $\mathbb{N}$  ان  $n^3 - n$  يقبل القسمة على 3

- تمرين 2**  
 ليكن  $a$  و  $b$  عددين مختلفين من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$   
 بين أن إذا كان  $a^n - b^n$  عددا أوليا فان  $n$  عدد أولي

- تمرين 3**  
 ليكن  $n \in \mathbb{N}$ . نعتبر المعادلة  $(x-2n)(y-2n) = 2n^2$   $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$   
 ليكن  $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$   
 1- بين أن  $\delta^2 / 2n^2$  و  $\delta / (x \wedge y)$   
 2- بين أن  $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$  و استنتج أن  $(x \wedge y) / \delta$   
 3- بين أن  $(x \wedge y) / n$

- تمرين 4**  
 ليكن  $(a; b) \in \mathbb{N}^2$  حيث  $(a+b) \wedge ab = p^2$  و  $p$  عدد صحيح طبيعي أولي  
 أ- بين أن  $p^2 / a^2$  و استنتج أن  $p/a$  و  $p/b$   
 ب- بين أن  $a \wedge b = p$  أو  $a \wedge b = p^2$

- تمرين 5**  
 لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  نعتبر الأعداد  $a_n = 4 \times 10^n - 1$  و  $b_n = 2 \times 10^n - 1$   
 و  $c_n = 2 \times 10^n + 1$   
 أ/ أحسب  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ .  
 ب/ بين أن  $a_n$  و  $c_n$  قابلان للقسمة على 3  
 ج/ بين أن  $b_3$  عدد أولي  
 د/ بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$ :  $a_{2n} = b_n \times c_n$  استنتج التفكيك إلى  
 جداء عوامل أولية للعدد  $a_6$   
 ه/ بين أن  $\text{PGCD}(b_n; c_n) = \text{PGCD}(b_n; 2)$

## حلول

## حل تمرين 1

- 1- ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n = 2k + 1$   
 لدينا  $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$  ومنه  $n^2 - 1 = 4k(k+1)$   
 وحيث أن  $k(k+1)$  عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)  
 فانه يوجد  $k'$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $k(k+1) = 2k'$  و بالتالي  $n^2 - 1 = 8k'$   
 إذن 8 يقسم  $n^2 - 1$   
 2- لدينا  $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$   
 ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  و منه يوجد  $k \in \mathbb{N}$  حيث  $n = 3k$  أو  $n = 3k + 1$  أو  $n = 3k + 2$   
 و بالتالي  $n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1)$  أو  $n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2)$

$$n^3 - n = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3(3k+2)(3k+1)(k+1) \text{ أو}$$

و في جميع هذه الحالات  $n^3 - n = 3k'$  حيث  $k' \in \mathbb{N}$

اذن  $n^3 - n$  يقبل القسمة على 3

### حل تمرين 2

ليكن  $a$  و  $b$  عددين مختلفين من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

نبين أن إذا كان  $a^n - b^n$  عددا أوليا فان  $n$  عدد أولي

لنبين أن  $n$  عدد غير أولي تستلزم  $a^n - b^n$  عدد غير أولي ( الاستلزام المضاد للعكس )

$\exists (p; q) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2 / n = pq$  ومنه  $n$  عدد غير أولي

$$a^{pq} - b^{pq} = (a^p)^q - (b^p)^q = (a^p - b^p) \left( \sum_{k=0}^{q-1} (a^p)^k (b^p)^{q-1-k} \right) \text{ ومنه}$$

بما أن  $a$  و  $b$  عددين مختلفين من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  و  $(p; q) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$  فان  $|a^p - b^p| \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{q-1} (a^p)^k (b^p)^{q-1-k} > 1 \text{ و}$$

اذن  $a^n - b^n$  عدد غير أولي

و منه إذا كان  $a^n - b^n$  عددا أوليا فان  $n$  عدد أولي

### حل تمرين 3

ليكن  $n \in \mathbb{N}$ . نعتبر المعادلة  $(x-2n)(y-2n) = 2n^2$   $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$

ليكن  $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$

1- نبين أن  $\delta^2 / 2n^2$

\* لدينا  $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$  ومنه  $\delta / (x-2n)$  و  $\delta / (y-2n)$

وبالتالي  $\delta^2 / (x-2n)(y-2n)$  إذن  $\delta^2 / 2n^2$

نبين أن  $\delta / (x \wedge y)$

لدينا  $\delta^2 / 2n^2$  و منه  $\delta / 2n$

و حيث  $\delta / (x-2n)$  و  $\delta / (y-2n)$  فان  $\delta / x$  و  $\delta / y$  إذن  $\delta / (x \wedge y)$

2- نبين أن  $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$

$$(x+y-2n)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 4nx - 4ny + 4n^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2(xy - 2nx - 2ny + 2n^2)$$

$$= x^2 + y^2 + 2((x-2n)(y-2n) - 2n^2)$$

$$= x^2 + y^2 \quad \text{car} \quad (x-2n)(y-2n) - 2n^2 = 0$$

نستنتج أن  $(x \wedge y) / \delta$

لدينا  $(x \wedge y)^2 / x^2$  و  $(x \wedge y)^2 / y^2$  ومنه  $(x \wedge y)^2 / (x^2 + y^2)$

و بالتالي  $(x \wedge y)^2 / (x+y-2n)^2$  ومنه  $(x \wedge y) / (x+y-2n)$

و حيث  $(x \wedge y) / x$  و  $(x \wedge y) / y$  فان  $(x \wedge y) / (x-2n)$  و  $(x \wedge y) / (y-2n)$

إذن  $(x \wedge y) / [(x-2n) \wedge (y-2n)]$  أي  $(x \wedge y) / \delta$

3- نبين أن  $(x \wedge y)/n$

لدينا  $\delta/2n$  ومنه  $2n = k\delta$   $\exists k \in \mathbb{Z}$  وبالتالي  $4n^2 = k^2\delta^2$   
 لدينا  $\delta^2/2n^2$  ومنه  $2n^2 = k'\delta^2$   $\exists k' \in \mathbb{Z}$  أي  $4n^2 = 2k'\delta^2$   
 ومنه  $k^2 = 2k'$  ومنه  $k$  زوجي أي  $k = 2m$   $\exists m \in \mathbb{Z}$   
 وحيث  $2n = k\delta$  فإن  $2n = 2m\delta$  أي  $n = m\delta$  إذن  $\delta/n$   
 وبما أن  $(x \wedge y)/\delta$  فإن  $(x \wedge y)/n$

حل تمرين 4

ليكن  $(a; b) \in \mathbb{N}^2$  حيث  $(a+b) \wedge ab = p^2$  و  $p$  عدد صحيح طبيعي أولي

أ- نبين أن  $p^2/a^2$  و نستنتج أن  $p/a$  و  $p/b$   
 $(a+b) \wedge ab = p^2$  ومنه  $p^2/ab$  و  $p^2/a+b$   
 وبالتالي  $p^2/ab+b^2$  و  $p^2/a^2+ab$  و  $p^2/a^2$  و  $p^2/b^2$   
 ومنه  $p/a$  و  $p/b$

ب- بين أن  $a \wedge b = p^2$  أو  $a \wedge b = p$

ليكن  $a \wedge b = d$  ومنه  $d/a$  و  $d/b$

وبالتالي  $d/ab$  و  $d/a+b$  إذن  $d/(a+b) \wedge ab$  أي  $d/p^2$

ومنه  $d \in \{1; p; p^2\}$

لنفرض أن  $d = 1$

$d = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge ab = 1 \Rightarrow p = 1$  وهذا غير صحيح لأن  $p$  أولي

إذن  $d = p$  أو  $d = p^2$

حل تمرين 5

$c_n = 2 \times 10^n + 1$  و  $b_n = 2 \times 10^n - 1$  و  $a_n = 4 \times 10^n - 1$

أ/ نحسب  $b_1, c_1, a_1, b_2, c_2, a_2, b_3, c_3, a_3$

$c_1 = 2 \times 10^1 + 1 = 21$        $b_1 = 2 \times 10^1 - 1 = 19$        $a_1 = 4 \times 10^1 - 1 = 39$   
 $c_2 = 2 \times 10^2 + 1 = 201$        $b_2 = 2 \times 10^2 - 1 = 199$        $a_2 = 4 \times 10^2 - 1 = 399$   
 $c_3 = 2 \times 10^3 + 1 = 2001$        $b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999$        $a_3 = 4 \times 10^3 - 1 = 3999$

ب/ نبين أن  $a_n$  و  $c_n$  قابلان للقسمة على 3

لدينا  $10 \equiv 1 [3]$  ومنه  $10^n \equiv 1 [3]$  وحيث أن  $4 \equiv 1 [3]$  فإن  $4 \times 10^n \equiv 1 [3]$

ومنه  $4 \times 10^n - 1 \equiv 0 [3]$  أي  $a_n \equiv 0 [3]$

لدينا  $10^n \equiv 1 [3]$  ومنه  $2 \times 10^n \equiv 2 [3]$  أي  $2 \times 10^n \equiv -1 [3]$

ومنه  $2 \times 10^n + 1 \equiv 0 [3]$  إذن  $c_n \equiv 0 [3]$

إذن  $a_n$  و  $c_n$  يقبلان القسمة على 3

ج/ نبين أن  $b_3$  عدد أولي

لدينا  $b_3 = 1999$  و 1999 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي أصغر أو تساوي 47

و  $47^2 = 2209 > 1999$

إذن  $b_3$  عدد أولي

د/ نبين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  :  $b_n \times c_n = a_{2n}$

ليكن  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = (2 \times 10^n)^2 - 1^2 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

نستنتج التفكيك إلى جداء عوامل أولية للعدد  $a_6$

$$2001 = 3 \times 23 \times 29 \quad \text{و} \quad a_6 = b_3 \times c_3 = 1999 \times 2001$$

$$a_6 = 3 \times 23 \times 29 \times 1999$$

هـ/ نبين أن  $\text{PGCD}(b_n ; c_n) = \text{PGCD}(b_n ; 2)$

$$c_n = 2 \times 10^n + 1 = 2 \times 10^n - 1 + 2 = b_n + 2$$

إذا كان  $d$  قاسم مشترك للعددين  $b_n$  و  $c_n$  فإن  $d$  قاسم للعدد 2 لان  $c_n - b_n = 2$

إذا كان  $d$  قاسم مشترك للعددين  $b_n$  و 2 فإنه قاسم للعدد  $c_n$  لان  $c_n = b_n + 2$

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $b_n$  و  $c_n$  هي مجموعة قواسم العددين  $b_n$  و 2

$$\text{إذن} \quad \text{PGCD}(b_n ; c_n) = \text{PGCD}(b_n ; 2)$$