تمارين حول الحسابيات

التمرين الأول

حدد العدد n في الحالات التالية :

أ- $n-4/6$ ب- $n-3/n+3$

ج- $n+1/3n-4$ د- $3n+4/11n+8$

التمرين الثاني

ليكن a و b عددان بحيث : $a\wedge b=1$

بين أن $(a+b)\wedge a=1$ و $(a-b)\wedge b=1$

التمرين الثالث

بين ما يلي : $(n^2+n+1)\wedge(n+1)=1$

$$(7n+2)\wedge(21n^2+16n+3)=1$$

$(4n+1)\wedge(4n-1)=1$ ، $n\wedge(n^2+1)=1$

$$(7n+2)\wedge(11n+3)=1$$

$$(2n+3)\wedge(3n+5)=1$$

$$(2n^2+4n+1)\wedge(n+2)=1$$

التمرين الرابع

1) ليكن a عدد نسبي بحيث $a\notin\{-1;0;1\}$.

بين أن a^4+a^2+1 غير أولي

2) ليكن a عدد نسبي غير منعدم و يخالف 1 .

بين أن a^4+4 غير أولي

التمرين الخامس

حل في $\mathbb{N}^2$ النظمتين : 1) $\begin{cases} x\wedge y=6 \\ xy=432 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\wedge y=12 \\ x+y=96 \end{cases}$

التمرين السادس

1) بين أن $(n^2+1)\wedge(n+1)=(n+1)\wedge 2$

2) حدد $(n^2+1)\wedge(n+1)$ حسب زوجية العدد n

3) حدد الأعداد الطبيعية n بحيث :

$$(n^2+1)\wedge(n+1)=(n+1)$$

التمرين السابع

1) حدد الأعداد a و b من $\mathbb{N}^*$ و بحيث $a\le b$ و التي تحقق

$$(a\vee b)-(a\wedge b)=7$$

2) حدد الأعداد a و b من $\mathbb{N}^*$ و التي تحقق :

$$2(a\vee b)-7(a\wedge b)=11$$

3) حدد الأعداد a و b من $\mathbb{N}^*$ و بحيث $a\le b$ و التي تحقق

$$(a\vee b)-3(a\wedge b)=4$$

التمرين الثامن

1) نضع $a=pn$ و $b=(p-1)n$ حيث $p\in\mathbb{N}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. بين أن $a\wedge b=a-b$

2) بين أنه إذا كان $a\wedge b=a-b$ فإنه يوجد زوج (p,n) في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $a=pn$ و $b=(p-1)n$

التمرين التاسع

ليكن x ; y عددين من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الأعداد

$a=40x(3y+2)$ ، $b=15x(8y+5)$

و $c=24x(5y+3)$

1) حدد $a\wedge b$ و $b\wedge c$

2) بين أن $a\wedge b\wedge c=x$

التمرين العاشر

ليكن a عدد طبيعي بحيث $a\ge 2$

1) بين أن إذا كان $p|n$ فإن $a^p-1|a^n-1$

2) استنتج أن العدد $2^{2010}-1$ مضاعف لكل من 31 ; 7 ; 3

التمرين الحادي عشر

نعتبر المعادلة $(E)\quad x^2-y^2+x-y=12$

أ- تحقق أن العددان $x-y$ و $x+y+1$ من زوجيتين مختلفتين

ب- حدد حلول المعادلة (E)

التمرين الثاني عشر

نعتبر المعادلة $(E)\quad x^2-y^2-6x-63=0$

أ- تحقق أن $(E)\Leftrightarrow(x-y-3)(x+y-3)=72$

ب- حدد حلول المعادلة (E)

التمرين الثالث عشر

n , p عددان من $\mathbb{Z}$.

نضع $x=5n+3p$ و $y=3n+2p$

أ- بين أن $(\,d|p \text{ و } d|n\,)\Rightarrow(\,d|y \text{ و } d|x\,)$

ب- استنتج أن $x\wedge y=p\wedge n$

بين أن لكل عدد طبيعي n العدد $5^{2n}+3$ لا يقبل القسمة على 8

التمرين الرابع عشر

1) حدد x في كل من الحالات التالية :

أ- $12 \equiv x \ [11]$

ب- $x \equiv 111 \ [23]$ و $-23 < x < 0$

ج- $x \equiv 215 \ [13]$ و $0 \leq x < 13$

2) ليكن n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

حدد قيم العدد n في كل من الحالات التالية :

أ- $13 \equiv 5 \ [n]$ ب- $125 \equiv -11 \ [n]$

ج- $87 \equiv 74 \ [n]$

التمرين الخامس عشر

1) أ- حدد حسب قيم n باقي قسمة العدد 2^n على 3

ب- استنتج باقي قسمة كل من العددين :

275423^n و $275423^n + 372121^n$ على 3

2) تحقق أن $3^3 \equiv 1 \ [13]$ ثم استنتج أن :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 13 / 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$

التمرين السادس عشر

أ- أدرس حسب قيم العدد n باقي قسمة العدد 5^n على 13

ب- حدد باقي قسمة العدد 2020^{2014} على 13

ج- بين ان $13 / 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

التمرين السابع عشر

ليكن p عدد أولي بحيث $p \geq 3$

1) بين أن $p \equiv 1 \ [4]$ أو $p \equiv 3 \ [4]$

2) بين أن $p^2 \equiv 1 \ [8]$

التمرين الثامن عشر

أ- حدد تبعا لقيم العدد n باقي قسمة العدد 3^n على 8

ب- بين أن : $8 / 3^{2n} - 1$ و $8 / 3^{2n+2} + 7$

و أن $8 / 3^{2n+4} - 1$

ج- نضع $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$ حدد باقي قسمة العدد A_p على 8 حسب زوجية العدد p

التمرين التاسع عشر

p عدد طبيعي أولي أكبر أو يساوي 5

1) بين أن: $p^2 \equiv 1 \, [3]$

2) باستعمال زوجية العدد p بين أن : $p^2 \equiv 1 \, [8]$

3) ليكن a و b عددين طبيعيين بحيث $3a = 8b$

ا- بين أن $3 / b$ و استنتج أن $8 / a$

ب- استنتج أن $p^2 \equiv 1 \, [24]$

التمرين العشرون

نضع $B_n = 3 \times 4^n + 2 \times 4^{n+1} + 4^{n+2}$ لكل عدد طبيعي n

1) أ- أدرس زوجية العدد B_n

ب- بين أن $3 | B_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- استنتج أن B_n يقبل القسمة على 6

2) حدد $B_n \wedge B_{n+1}$

التمرين الحادي و العشرون

بين أن العددين $n^2 - n + 4$ و $n^2 + n + 4$ زوجيين

ثم استنتج أن $n^4 \equiv n^2 \quad [4]$

التمرين الثاني و العشرون

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$

1) ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) .

بين أن $x \equiv 1 \, [5]$ أو $x \equiv 2 \, [5]$

2) حدد مجموعة حلول المعادلة (E)

التمرين الثالث و العشرون

حل المعادلات التالية :

1) $\bar{3}\bar{x} = \bar{1}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

2) $\bar{5}\bar{x} = \bar{2}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

3) $\bar{6}\bar{x}^2 + \bar{4} = \bar{0}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

4) $\bar{5}\bar{x}^2 + \bar{x} - \bar{4} = \bar{0}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

التمرين الرابع و العشرون

1. تحقق أن :

$10^3 - 1 = 9 \times 111$ و أن $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

2. نضع : $A_n = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$

أ- حدد باقي القسمة للعدد A_n على 111

ب- بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن A_n يقبل القسمة على 7 و 11 و 13

ج- نفترض أن n عدد زوجي .

ج1- بين أن $A_n - 6$ يقبل القسمة على 7 و 11 و 13

ج2- حدد باقي القسمة للعدد A_n على 111×1001