Arithmétique dants Z

الحسابيات في Z

I . القسمة الأقليدية / قابلية القسمة / الموافقة : — ammarimaths

الموافقة بترديد n:	قابلية القسمة:	خاصية القسمة الأقليدية:
نعتبر عددا طبيعيا غير منعدم n . a و b عددان صحيحان نسبيان؛ نقول أن العدد a موافق للعدد b بترديد n ، إذا وجد عدد صحيح k بحيث: $a-b=k.n$ نكتب : a≡b[modulo]	a و b عددان صحيحان؛ نقول أن b يقسم a (أو a مضاعف ل b)؛ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح q بحيث: $a=b.q$	مهما يكن العدد الصحيح النسبي a ، ومهما يكن العدد الصحيح الطبيعي غير المنعدم، b ، يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r ، بحيث : $a=b.q+r$ و $0\le r\prec b$

II . خاصيات قابلية القسمة و الموافقة : — ammarimaths-bm

قابلية القسمة:

$$a/a$$

$$(a/b \;\; et \;\; c/d) \Rightarrow ac/bd$$

$$(a/b \;\; et \;\; b/c) \Rightarrow a/c$$

$$(a/b \;\; et \;\; b/a) \Rightarrow |a|=|b|$$

$$(\delta/a \;\; et \;\; \delta/b) \Rightarrow (\forall(\alpha,\beta)\in Z^2)\;;\;\delta/\alpha.a+\beta.b$$

$$a^n/b \Rightarrow a/b$$

الموافقة:

$$a\equiv b[n] \Leftrightarrow a-b=k.n \Leftrightarrow n/a-b$$

$$\begin{cases} a\equiv b[n] \\ c\equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c\equiv b+d[n] \\ a.c\equiv b.d[n] \end{cases}$$

III . القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر : — ammarimaths-bm

القاسم المشترك الأكبر:

نرمز له : $d=pgdc(a,b)=a\wedge b$

يحقق القاسم المشترك الأكبر، الخاصيات التالية:

$$(d=a\wedge b) \;\Leftrightarrow\; (\exists(a',b')\in Z^2)\;;\;\begin{cases} a=d.a' \\ b=d.b' \end{cases} \;et\;\; a'\wedge b'=1$$

$$\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow \;\; d'/a\wedge b$$

المضاعف المشترك الأصغر:

يحقق المضاعف المشترك الأصغر، الخاصيات التالية:

$$(m=a\vee b) \;\Rightarrow\; \begin{cases} a/m \\ b/m \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a/c \\ b/c \end{cases} \;\Rightarrow\; a\wedge b/c$$

خاصية مشتركة:

$$\forall(a,b)\in Z^2;(a\vee b).(a\wedge b)=|a.b|$$

IV . الأعداد الأولية فيما بينها / خاصيات — ammarimaths-bm:

الأعداد الأولية فيما بينها:	خاصيات أخرى:

Citation : « La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique »

Arithmétique dans Z

الحسابيات في Z

نقول أن العددين a b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذاكان:

pgcd (a,b)=1.

مبرهنة كوص:

$$(c/a.b \text{ et } c\wedge a=1)\Rightarrow(c/b)$$

$$(a/c \text{ et } b/c \text{ et } a\wedge b=1)\Rightarrow(a.b/c)$$

$$(a\wedge b=1 \text{ et } a\wedge c=1)\Rightarrow(a\wedge b.c)=1$$

$$(a\wedge b=1)\Leftrightarrow\forall(m,n)\in IN^*xIN^*\ ;\ (a^m\wedge b^n=1)$$

$$(a=b.q+r \text{ et } 0\le r\prec b)\Rightarrow(a\wedge b=r\wedge b)$$

V. الأعداد الأولية / خاصيات :

ammarimaths-bm

يكون عدد صحيح، عددا أوليا إذا وفقط إذا كان يقبل قاسمين موجبين بالضبط 2، 3 ، 5، 7 ... العددان 1 و 1- ليسا أوليان.

مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية...

خاصيات: ليكن p عددا أوليا، لدينا:

$$(p/a.b)\Rightarrow(p/a \quad ou \quad p/b)$$

$$(p/a^n)\Rightarrow(p/a)$$

$$(p/a_1.a_2...a_n)\Leftrightarrow\exists i\in(1,2,...,n)\ ;\ (p/a_i)$$

$$(p/a)\Rightarrow p\wedge a=p \text{ et } (p \text{ ne divise pas } a)\Rightarrow p\wedge a=1$$

I. خوارزمية أقليدس :

ammarimaths-bm

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين a و b ، بحيث:

$a > b$

نقسم العدد a (العدد الأكبر) على العدد b ونجد:

$$(1):\quad a=b.q_0+r_0 \quad et \quad 0\le r_0\prec b$$

إذا كان $r_0=0$ ، فإن $pgcg(a,b)=b$

إذا كان $r_0 \# 0$ ، نقسم b على r_0 ، ونجد:

$$(2):\quad b=r_0.q_1+r_1 \quad et \quad 0\le r_1\prec r_0\prec b$$

إذا كان $r_1=0$ ، فإن $pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=r_0$

إذا كان $r_1 \# 0$ ، نقسم r_0 على r_1 ، ونجد:

الخ.

بعد عدد محدود من العمليات نحصل على باقي منعدم (ذلك لأن متتالية البواقي هي متتالية تناقصية لأعداد صحيحة)

ليكن r_n آخر باقي غير منعدم ، يكون لدينا إذن:

$$pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=...=pgcd(r_{n-1},r_n)=r_n$$

II. تفكيك عدد صحيح الى جداء عوامل أولية :

ammarimaths-bm

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ومخالف للعدد 1 ، يتفكك بشكل وحيد على شكل:

$$n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$$

بحيث تكون الأعداد pi أولية، والأعداد α_i صحيحة غير منعدمة.

III. مجموعة أصناف التكافؤ : Z/n.Z

ammarimaths-bm

علاقة التوافق:

$$a\equiv b[n]\Leftrightarrow a-b=k.n\Leftrightarrow n/a-b$$

هي علاقة تكافؤ في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية، منسجمة مع قانوني الجمع و الضرب:

$$\begin{cases}a\equiv b[n]\\ c\equiv d[n]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c\equiv b+d[n]\\ a.c\equiv b.d[n]\end{cases}$$

صنف تكافؤ العدد الصحيح النسبي x ، هو المجموعة المعرفة كما يلي:

$$\alpha=\bar{x}=\{y\in Z/\ \ y\equiv x[\text{modulo } n]\}$$

يرمز لمجموعة أصناف التكافؤ : $Z/n.Z$

$$Z/n.Z=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},......,\overline{n-2},\overline{n-1}\}$$

يعرف الجمع والضرب في هذه المجموعة كما يلي:

$$\begin{cases}\bar{a}+\bar{b}\equiv\overline{a+b}\\ \bar{a}.\bar{b}\equiv\overline{a.b}\end{cases}$$

$(Z/n.Z\ ,\ +\ ,\ x\ )$ حلقة واحدية تبادلية، بصفة عامة غير تكاملية.

إذا كان العدد n أوليا، فإن $(Z/n.Z\ ,\ +\ ,\ x\ )$ يكون جسما.

$$(\bar{a} \text{ inversible dans } Z/n.Z)\Leftrightarrow(a\wedge n=1)$$

IV. نظمة العد : Z/n.Z

ammarimaths-bm

ليكن x عددا صحيحا أكبر من أو يساوي 2.

كل عدد صحيح b يمكن أن يكتب على الشكل :

$$b=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+....+a_1.x+a_0$$

نكتب:

$$(1):\quad b=\overline{a_na_{n-1}....a_1a_0}^{(x)}$$

ونقول أن هذه الكتابة هي الكتابة المختصرة للعدد b في

*Citation : « **La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique** »*

Arithmétique dans Z

Zالحسابيات في

بحيث: $a_n \neq 0$ et $(\forall i \in [0,n])$; $a_i \in [0,n-1]$	نظمة العد الذي أساسه x .
V . تحديد القاسم المشترك الأكبر والمصاعف المشترك الأصغر لعددين :	ammarimaths-bm
نعتبر : $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ التفكيك الى جداء عوامل أولية للعددينم a و b . نجد:	$a \wedge b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\inf(\alpha_i,\beta_{iç})}$ $a \vee b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sup(\alpha_i,\beta_{iç})}$

*Citation : « **La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique** »*