الحسابيات

I- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

أنشطة

نشاط1 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

بين أن8 يقسم n^2-1 لكل عدد صحيح الطبيعي فردي n

الحل

ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$

لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد k' من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1)=2k'$ و بالتالي $n^2-1=8k'$

إذن 8 يقسم n^2-1

نشاط2

بين أن لكل n من IN العدد n^3-n يقبل القسمة على 3

الحل

لدينا $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

ليكن n من IN و منه يوجد $k\in\mathbb{N}$ حيث $n=3k$ أو $n=3k+1$ أو $3k+2$

و بالتالي $n^3-n=3k(3k-1)(3k+1)$ أو $n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)$

أو $n^3-n=(3k+2)(3k+1)(3k+3)=3(3k+2)(3k+1)(k+1)$

و في جميع هذه الحالات $n^3-n=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

اذن n^3-n يقبل القسمة على 3

نشاط3

أنشر $\left(10^6-1\right)^3$ ثم استنتج باقي القسمة للعدد 999999^3 على 5

نشاط4

حدد الأرقام x و y بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على28

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$

نقول إن b يقسم a و نكتب b/a إذا وجد k في $\mathbb{Z}$ حيث $a=kb$

$$(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad a=kb$$

2- ملاحظات

*- إذا كان b يقسم a إننا نقول إن b قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b

*- ليكن $b\in\mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد b هي المجموعة $b\cdot\mathbb{Z}=\{k\cdot b / k\in\mathbb{Z}\}$

*- ليكن $a\in\mathbb{Z}^*$ $b\in\mathbb{Z}$: $b/a \Rightarrow |b|\le|a|$

3- خاصيات العلاقة " b/a "

*- a/a $\forall a\in\mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة" b/a " انعكاسية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/c \end{cases} \Rightarrow b/c$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$ نقول إن العلاقة" b/a " متعدية

*- $\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow |a|=|b|$ $\forall(a;b;c)\in\mathbb{Z}^3$

ملاحظة

$\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow a=b \quad \forall(a;b;c)\in\mathbb{N}^3$ نقول إن العلاقة" b/a " تخالفية في $\mathbb{N}$

تمرين

1- بين أن $b/a \Leftrightarrow a\cdot\mathbb{Z}\subset b\cdot\mathbb{Z} \quad \forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2$

2- بين أن $a/(x_1-y_1) \;\wedge\; a/(x_2-y_2) \Leftrightarrow a/(x_1x_2-y_1y_2) \quad \forall(a;x_1;x_2;y_1;y_2)\in\mathbb{Z}^5$

II- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

1- القسمة الاقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{N}$ حيث $a\neq b$

يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في $\mathbb{N}$

العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي.

2- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

ليكن a من $\mathbb{Z}$ و b في $\mathbb{N}^*$ حيث $a\neq b$

يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ بحيث $a=bq+r$ حيث $0\leq r\prec b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في $\mathbb{Z}$

العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي

تمرين

حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ x على 7 خارج q و باقي q^2

تمرين

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ a على b و القسمة الاقليدية لـ a' على b نفس الخارج q و كان $a\prec x\prec a'$ فان q خارج القسمة الاقليدية لـ x على b

- الأعداد الأولية

1- تعاريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{Z}$

نقول إن العدد d قاسم فعلي للعدد a إذا و فقط إذا كان d يقسم a و $d\notin\{-1;1;-a;a\}$

أمثلة

*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3

*- لدينا $D_7=\{1;-1;7;-7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{Z}$

نقول إن العدد a أولي إذا و فقط إذا كان a يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية

a أولي $\Leftrightarrow$ $D_a=\{1;-1;a;-a\}$ و $|a|\neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

2- خاصيات

أ- إذا كان p و q عددين أوليين و $|q|\neq|p|$ فان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 (العكس غير صحيح)

ب- ليكن a عددا غير أولي في $\mathbb{Z}^*$ و يخالف 1 و 1- .
أصغر قاسم فعلي موجب للعدد a هو عدد أولي

د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

لتكن P^+ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$P^+\neq\varnothing$ لأن $2\in P^+$

لنفترض أن P^+ منتهية و ليكن p أكبر عنصر من P^+ . لنعتبر $m=p!+1$ لدينا $m\succ p$

و منه $m\notin P^+$ أي m ليس أوليا و بالتالي للعدد m قاسم أولي q ومنه $q\in P^+$ و $q\leq p$

$q\leq p$ يستلزم q يقسم $p!$ لأن(q أحد عوامل $p!$)

لدينا q/m و $q/p!$ ومن $q/(m-p!)$ أي $q/1$ وهذا يتناقض مع كون q أولي

ومنه P^+ غير منتهية إذن P غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$

إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2\leq n$

البرهان

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ و n غير أولي و ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب لـ n إذن p أولي ومنه يوجد k من $\mathbb{N}^*$ حيث $n=pk$

بما أن $1\prec p\prec n$ فان $1\prec k\prec kp=n$ إذن k قاسم فعلي موجب للعدد n و بالتالي $p\leq k$

إذن $p^2\leq pk=n$

ملاحظة

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$

لتأكد من أن n هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية p حيث $p^2\leq n$

- فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان n غير أولي
- و إذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان n عدد أولي

(عمليا نتوقف عندما تكون $p^2\succ n$)

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و7 و 11 و 13

$17^2=289\quad;\quad 13^2=169$

4- خاصيات

خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

نتيجة

لتكن p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا

$p/p_1\times p_2\times......\times p_n\Rightarrow\exists i\in\{1;2;....;n\}\quad p=p_i$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ1 و 1- يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_1 و α_2......و α_n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon=\pm1$

ملاحظة عندما نكتب n على شكل $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ فاننا نقول اننا فككنا n الى جداء عوامل أولية

مثال فكك العدد1752- إلى جداء عوامل أولية

2- تطبيقات

(A) نتيجة1

ليكن $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية
يكون عدد d قاسما للعدد n اذا وفقط اذا كان تفكيك d الى عوامل جداء أولية على شكل
$$d=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times......\times p_k^{\beta_k}$$
حيث $0\le\beta_i\le\alpha_i$ لكل i من $\{1;2;....;k\}$

نتيجة2

ليكن $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times......\times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية
يكون عدد m مضاعفا للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك m إلى عوامل جداء أولية على شكل
$$d=\varepsilon p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times......\times p_k^{\lambda_k}$$
حيث $0\le\alpha_i\le\lambda_i$ لكل i من $\{1;2;....;k\}$

IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي a بالرمز D_a

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعا لـ a و b يرمز له بـ $a\wedge b$
$$\delta=a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}\delta\in D_a\cap D_b\\ \forall x\in D_a\cap D_b\qquad x\le\delta\end{cases}$$

2- خاصيات

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$
$$a\wedge b=b\wedge a$$
$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$
$$a\wedge a=|a|$$

مثال $48\wedge 60=12$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمات المتتالية " لتحديد القاسم المشترك

أ- ملاحظة

* $\forall a\in\mathbb{Z}^*\quad D_a=D_{-a}$

* $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^{*2}\quad a\wedge b=|a|\wedge|b|$ ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبيين يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$

- إذا كان b/a فان $a\wedge b=b$

- إذا كان b لا يقسم a فانه يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ حيث $a=bq+r$ و $0\prec r\prec b$
بما أن $r=a-bq$ فان كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم r
و بالتالي قاسم مشترك لـ a و b هو قاسم مشترك لـ b و r أي $D_a\cap D_b\subset D_r\cap D_b$
عكسيا كل قاسم مشترك لـ b و r يقسم a (لأن $a=bq+r$)
ومنه كل قاسم مشترك لـ b و r هو قاسم مشترك لـ a و b أي $D_r\cap D_b\subset D_a\cap D_b$
إذن $D_a\cap D_b=D_r\cap D_b$ و بالتالي $a\wedge b=r\wedge b$

تمهيدة

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b

$a \wedge b = r \wedge b$

ج- ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ نفترض أن $b \prec a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 \le r_1 \prec b$

❖ إذا كان $r_1 = 0$ فان b/a و منه $a \wedge b = b$

❖ اذا كان $r_1 \succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ b على r_1 و نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \le r_1 \prec r_2$

اذا كان $r_2 = 0$ فان $b \wedge r_1 = r_1$ و منه $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان $r_2 \succ 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ r_1 على r_2 و نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \le r_3 \prec r_2$

....

بإجراء العملية n مرة نحصل على

$a = bq_1 + r_1$ ، $0 \prec r_1 \prec b$ ، $a \wedge b = b \wedge r_1$

$b = r_1q_2 + r_2$ ، $0 \prec r_2 \prec r_1$ ، $b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$

$r_1 = r_2q_3 + r_3$ ، $0 \prec r_3 \prec r_2$ ، $r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3$

. . .

. . .

. . .

. . .

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ ، $0 \prec r_n \prec r_{n-1}$ ، $r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$

و منه نستنتج $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = ... = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$ ،

$0 \prec r_n \prec r_{n-1} ...... \prec r_3 \prec r_2 \prec r_1 \prec b$

نضع $A = \{r_1; r_2; r_3 .... r_n; .....\}$

A جزء من $\mathbb{N}$ مكبور بالعدد b و منه A مجموعة منتهية

إذن $r_p \ne 0 \quad ; \quad r_{p+1} = 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} /$

بما أن $r_{p+1} = 0$ فان $r_{p-1} = r_p q_{p+1}$ و منه $r_{p-1} \wedge r_p = r_b$

إذن $a \wedge b = r_p$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو اخر باقي غير منعدم في طريقة القسمات المتتالية لـ a على b

مثال باستعمال طريقة القسمات المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$1640 = 156 \times 10 + 80$

$156 = 80 \times 1 + 76$

$80 = 76 \times 1 + 4$

$76 = 4 \times 19 + 0$

إذن $1640 \wedge 156 = 4$

1- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a \wedge b$

يوجد عددان u و v من $\mathbb{Z}$ حيث $\delta = au + bv$

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a \wedge b$

نعتبر $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv \quad ; \quad (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

لدينا $A \ne \emptyset$ لأن $a^2 + b^2 \in A$

$A \subset \mathbb{N}$ و بالتالي $x \ge p \quad \forall x \in A \quad \exists p \in A$

ليكن $p = au_0 + bv_0$ نبرهن أن $\delta = p$

❖ بما أن δ/a وδ/b فان δ/p و منه $\delta \le p$

❖ بإنجاز القسمة لـ a على p نحصل على $0 \le r \prec p \quad ; \quad a = pq + r \quad \exists(q;r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$

❖ ومنه $r = a - q(au_0 + bv_0) = a(1 - qu_0) + b(-qv_0)$

إذا كان $r \succ 0$ فان $r \in A$ و منه $r \ge p$ و هذا يتناقض مع كون $r \prec p$

و بالتالي $r = 0$ أي p/a وبنفس الطريقة نبرهن أن p/b

ومنه p قاسم مشترك لـ a و b وبالتالي $\delta \ge p$

لدينا $\delta \le p$ و $\delta \ge p$ إذن $\delta = p$

ب- استنتاجات

* من البرهان السابق نستنتج $\delta = a \wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعا من المجموعة

$B = \left\{ n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv \quad ; \quad (u;v) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

* بما أن δ قاسم مشترك لـ a و b فان أي قاسم لـ δ يقسم a و b

عكسيا اذا كان c قاسم مشترك لـ a و b فان $b = k_2 c \quad ; \quad a = k_1 c \qquad \exists(k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2$

بما أن $\delta = a \wedge b$ فانه $\delta = au + bv \qquad \exists(u;v) \in \mathbb{Z}^2 /$

ومنه $\delta = (k_1 u + k_2 v)c$ أي c يقسم δ

مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a \wedge b$

مجموعة قواسم δ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b $\quad (\quad D_a \cap D_b = D_\delta \quad)$

نتيجة

إذا كان a و b و c أعداد من $\mathbb{Z}$ فان

$a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c|\delta$

خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ......\times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ......\times p_k^{\beta_k}$

وحيث p_1 و p_2 ......وp_n أعداد أولية

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد $\delta = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ......\times p_k^{\lambda_k}$

حيث $\lambda_i = \inf(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

مثال حدد $-180 \wedge 1170$

2- القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 وa_3.....و a_k أعداد من $\mathbb{Z}^*$

أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد a_1 و a_2 وa_3.....و a_k يسمى القاسم المشترك الأكبر لـa_1

و a_2 وa_3.....و a_k

مثال $\quad 12 \wedge -18 \wedge 15 = 3$

نتيجة

إذا كان δ هو القاسم المشترك الأكبر لـa_1 و a_2 وa_3.....و a_k فانه توجد اعداد α_1 و α_2 وα_3.....

و α_k من $\mathbb{Z}$ حيث $\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i a_i$

VI- المضاعف المشترك الأصغر

1- تعريف

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^{*2}$

المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ a و b نرمز له بـ $a \vee b$

2- خاصيات

أ- *- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$

$a \vee b = b \vee a$

$(a \vee b)|c| = ac \vee bc$

$a \wedge a = |a|$

$b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$

ب- *- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و$a \vee b = m$
كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

ج- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و$a \vee b = m$ و $a \wedge b = \delta$
$m\delta = |ab|$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$

خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ...... \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ...... \times p_k^{\beta_k}$ وحيث p_1 وp_2 ...... p_n أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times ...... \times p_k^{\lambda_k}$
حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i ; \beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

مثال حدد $-180 \vee 1170$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k أعداد من $\mathbb{Z}^*$
أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ a_1 و a_2 وa_3 .....و a_k

و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

III- الموافقة بترديدn

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$
نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b \quad [n]$ إذا كان n يقسم $a-b$

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a-b = kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n"

أ- $a \equiv a \quad [n]$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" انعاكسية

ب- $a \equiv b \quad [n] \Rightarrow b \equiv a \quad [n]$ $\forall (a;b) \in \mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" تماثلية

ج- $(a \equiv b \quad [n]) et (b \equiv c \quad [n]) \Rightarrow a \equiv c \quad [n]$ $\forall (a;b) \in \mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n" علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$
$a \equiv b \quad [n]$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$ بحيث $a=nq_1+r_1$ و $b=nq_2+r_2$ مع $0\le r_1\prec n$ و $0\le r_2\prec n$

❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1=r_2$ فان $a-b=n(q_1-q_2)$ أي أن $a\equiv b\quad [n]$

❖ عكسيا إذا كان $a\equiv b\quad [n]$ فانه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث $a-b=nk$

و منه $r_1-r_2=(k-q_1-q_2)n$ أي n يقسم r_1-r_2

و لدينا $0\le r_1\prec n$ و $0\le r_2\prec n$ ومنه $|r_1-r_2|\prec n$

و بالتالي $r_1-r_2=0$ أي $r_1=r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* - $\forall(a;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\quad \exists(q;r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\quad a=nq+r\quad et\quad 0\le r\prec n$

- $\forall(a;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\quad \exists r\in\mathbb{N}\quad a\equiv r\quad [n]\quad et\quad r\in\{0;1;.....;n-1\}$

- المجموعة $\{x\in\mathbb{Z}/x\equiv r\quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ $\overline{r}$

المجموعة $\overline{r}$ تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n"في $\mathbb{Z}$

- $x\in\overline{r}\Leftrightarrow x\equiv r\quad [n]$

* - $\forall a\in\mathbb{Z}\quad \exists r\in\{0;1;....;n-1\}/\quad a\equiv r\quad [n]$ أي $\forall a\in\mathbb{Z}\quad \exists r\in\{0;1;....;n-1\}/\quad \overline{a}=\overline{r}$

* - إذا كان $\overline{r}=\overline{r'}$ و $0\le r\prec n$ و $0\le r'\prec n$ فان $r=r'$

* - $\forall(x;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\quad \exists r\in\{0;1;..;n-1\}/\quad x\in\overline{r}$ (r باقي القسمة الاقليدية على n)

اذن $\mathbb{Z}=\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}\cup....\cup\overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\overline{0};\overline{1};.....;\overline{n-1}\}$ يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1}\}$ حيث $\overline{0}=2\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=2k+1\quad (k\in\mathbb{Z})\}$

* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$ حيث $\overline{0}=7\cdot\mathbb{Z}$ و $\overline{1}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+1\quad (k\in\mathbb{Z})\}$

و $\overline{2}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+2\quad (k\in\mathbb{Z})\}$ و $\overline{3}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+3\quad (k\in\mathbb{Z})\}$

و ....و $\overline{6}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+6\quad (k\in\mathbb{Z})\}$

في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ لدينا $\overline{532}=\overline{4}$ لأن $532\equiv 4\quad [7]$

$\overline{-36}=\overline{6}$ لأن $-36\equiv 6\quad [7]$

4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x وy وz وt من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

إذا كان $x\equiv y\quad [n]$ و $z\equiv t\quad [n]$ فان $x+z\equiv y+t\quad [n]$

إذا كان $x\equiv y\quad [n]$ و $z\equiv t\quad [n]$ فان $x\times z\equiv y\times t\quad [n]$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

-* إذا كانت $x\in\overline{r}$ و $x'\in\overline{r'}$ فان $x+x'\in\overline{r+r'}$ و $x\times x'\in\overline{r\times r'}$ نكتب $\overline{r+r'}=\overline{r}+\overline{r'}$ و $\overline{r\times r'}=\overline{r}\times\overline{r'}$

-* $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2\quad \forall(p;n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\quad a\equiv b\quad [n]\Rightarrow a^p\equiv b^p\quad [n]$

أمثلة

* في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $\quad \overline{3}+\overline{4}=\overline{7}=\overline{2}$, $\overline{0}+\overline{1}+\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}=\overline{10}=\overline{0}$, $\overline{3}\times\overline{4}=\overline{12}=\overline{2}$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية x حيث في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $\quad \overline{x}+\overline{5}=\overline{2}$

تمرين

1- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

2- بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

3- بين أن $[n]$ $\quad n\left(n^4-1\right)\equiv 0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

4- بين أن 17 يقسم $2^{3n-2}+3\times 5^{2n-1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

3- ليكن n من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4