السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــــي حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 :

1

لدينا لكل $x \in IR$:

$$\sin(8x) = 2\cos(4x)\sin(4x) = 2\cos(4x)(2\cos(2x)\sin(2x)) = 4\cos(4x)\cos(2x)(2\cos(x)\sin(x))$$

$$\sin(8x) = 8\cos(4x)\cos(2x)\cos(x)\sin(x)$$

بالتالي : $\cos x.\cos 2x.\cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\sin x}$ $\quad \forall x \in IR - \bigcup\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in Z\right\}$

2

حسب السؤال السابق :

$$A = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-1}{8}$$

و

$$B = \cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{1}{8}$$

استعملنا الخاصية الهامة : $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

تمرين 2 :

1

لدينا : $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ $\quad \forall x \in IR \ / \ x \neq \pi + 2k\pi$

2

حسب السؤال السابق : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

3

نعلم أن : $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

منه : $\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$

منه : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{4\left(2 - \sqrt{3}\right)} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$ و بما أن : $\dfrac{\pi}{12} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ فإن: $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geq 0$

منه : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$ و بالتالي :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \times \left(2 - \sqrt{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{array}}$$

يجب أن نتذكر أن : $a = 2 \times \dfrac{a}{2}$ و أيضا أن لا ننسى القواعد الأساسية التي تجمع بين النسب المثلثية الثلاث.

تمرين 3 :

1

لكل $x\in IR$ ، نضع : $A(x)=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$

لدينا :

$$A(x)=\cos x+\cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$A(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)=0$$

2

لكل $x\in IR$ ، نضع : $B(x)=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

لدينا :

$$B(x)=\sin x+\sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$B(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)=0$$

3

لدينا لكل $x\in IR$:

$$\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin(x).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right)=\sin(x)+\cos(x)$$

من الأفضل استعمال قواعد النشر عوض التعميل كلما أمكن ذلك

تمرين 4 : $x+y+z=\pi$

1

لدينا: $\sin x.\cos y+\cos x.\sin y=\sin(x+y)=\sin(\pi-z)=\sin(z)$

2

لدينا :

$$\sin x+\sin y+\sin z=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi-z}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi-z}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\times 2\cos\left(\frac{\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{2}}{2}\right)$$

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\left(\frac{z}{2}\right)\times 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

3

لدينا : $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

منه :

$$\tan x+\tan y=\tan(x+y)(1-\tan x\tan y)=\tan(\text{®}-z)(1-\tan x\tan y)=-\tan z(1-\tan x\tan y)$$

$$\tan x+\tan y=-\tan z+\tan x\tan y\tan z$$

بالتالي :

$$\tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z$$

قواعد التعميل ضرورية في كثير من التمارين، بالنسبة للظل التعميل يتم وفق الخاصية :

$$\tan x+\tan y=\tan(x+y)(1-\tan x\tan y)$$

تمرين 5 : ليكن x عددا حقيقيا ، حول إلى جداء التعابير التالية:

$A=\sin x+\sin 3x+2\sin 2x$ $=2\sin(2x)\cos(-x)+2\sin 2x$ $A=2\sin 2x(\cos x+1)$	$B=1-\cos 2x+\cos 3x-\cos 5x$ $=2\sin^2 x-2\cos 4x\sin(-x)$ $B=2\sin x(\sin x+\cos 4x)$
$C=1-\cos 2x-\sin 2x$ $=2\sin^2 x-2\sin x\cos x$ $C=2\sin x(\sin x-\cos x)$	$D=1+2\cos x+\cos 2x$ $=1+\cos 2x+2\cos x$ $=2\cos^2 x+2\cos x$ $D=2\cos x(\cos x+1)$
$E=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$ $=\cos 3x+\cos x+\cos 4x+\cos 2x$ $=2\cos(2x)\cos x+2\cos(3x)\cos x$ $=2\cos x(\cos(2x)+\cos(3x))$ $E=4\cos x\cos\left(\dfrac{5x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$	$F=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$ $=\sin 3x+\sin x+\sin 4x+\sin 2x$ $=2\sin(2x)\cos x+2\sin(3x)\cos x$ $=2\cos x(\sin(2x)+\sin(3x))$ $F=4\cos x\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

- تمرين لحفظ القواعد حيث من المفترض حفظها بإتقان و ليس تأجيل ذلك لحين اقتراب الفرض ، لأن استيعاب الخاصية جزء من الجواب.
- لم يطلب في التمرين التعميل إلى عدد معين من العوامل لذلك يمكن الاكتفاء بعاملين كما هو الشأن في A و B و C و D
- لكن من الأفضل خصوصا أثناء حل المعادلات التعميل بعدد عوامل أكبر كما هو الشأن في E و F.