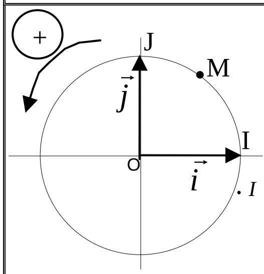
الأولى ب ع رياضية	الحساب المثلثي ملخص الدرس	ح.بوعيون

I- الأفاصيل المنحنية



1) *) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

*) نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

*) الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I.

2) لتكن M نقطة من U. للحصول على أفصول منحني لــ M.

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحني للنقطة M.

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة M.

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).
وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان α و β أفصولين منحنيين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة: 1)

$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$
$\Leftrightarrow$ (α و β أفصولين منحنيين لنفس النقطة)

2) *) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\quad[2\pi]$

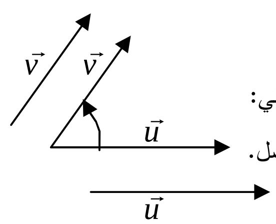
*) $\alpha\equiv\beta\,[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\ [2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$. α_0 يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M (ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.
عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو n. ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابعة. عادة نعوض k بالقيم $0,1,2,....,(n-1)$ وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U.

II- قياس الزوايا الموجهة

1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.
من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:



*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما (عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

⟵) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب
$(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv\alpha[2\pi]$.

⟵) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.
ونكتب $(\overline{\vec{u},\vec{v}})=-\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-\alpha[2\pi]$.

2) خاصيات.

a) من بين قياسات $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\leq\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv(\overline{\vec{u},\vec{w}})+(\overline{\vec{w},\vec{v}})\ [2\pi]$ (علاقة شال).

c) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-(\vec{v},\vec{u})\quad[2\pi]$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون α و β قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة:

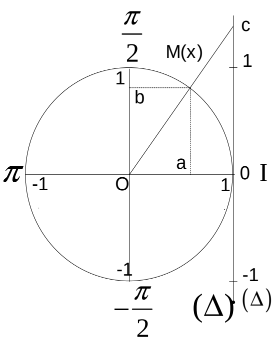
1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III- الدوال المثلثية

1) تعريف



لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I.
وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I.
ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I.

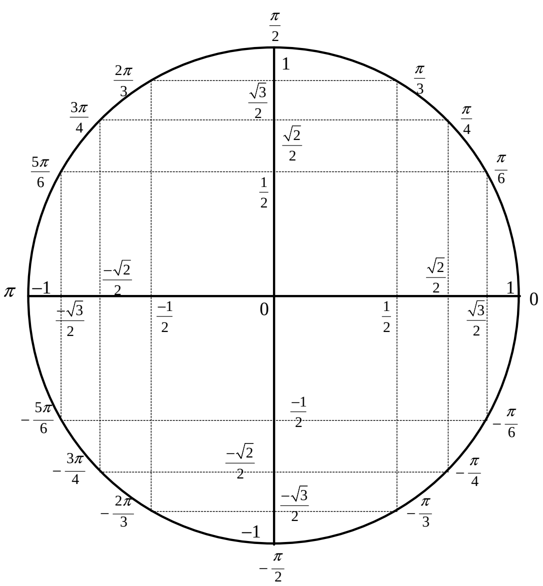
*) ليكن x من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x
ليكن a أفصول ل M و b
ارتوب M يعني $M(a,b)$.
c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ) لدينا

$$\cos x=a\qquad \sin x=b\qquad \tan x=c$$

2) خاصيات

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt2}{2}$	$\frac{-\sqrt3}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\sqrt3$	X	$-\sqrt3$	-1	$-\frac{1}{\sqrt3}$	0



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\boxed{\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos^2 x+\sin^2 x=1 \qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}}$

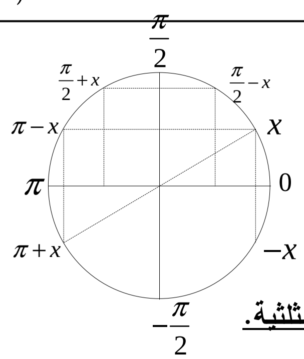
d) $\boxed{\cos(x+2k\pi)=\cos x \qquad \sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad \tan(x+k\pi)=\tan x}$

e) $\boxed{\cos(-x)=\cos x \qquad \sin(-x)=-\sin x \qquad \tan(-x)=-\tan x}$

f)
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi-x)&=-\cos x\\ \sin(\pi-x)&=\sin x\\ \tan(\pi-x)&=-\tan x\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos(\pi+x)&=-\cos x\\ \sin(\pi+x)&=-\sin x\\ \tan(\pi+x)&=\tan x\end{aligned}}$$

g)
$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\frac{1}{\tan x}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\cos x\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=-\frac{1}{\tan x}\end{aligned}}$$

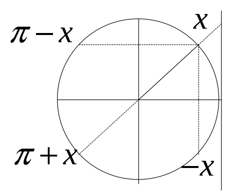
h) $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}): -1\leq \cos x\leq 1 \quad ; \quad -1\leq \sin x\leq 1}$



3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\boxed{\begin{aligned}&\cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi\\ &\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \qquad \cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ x=-\alpha+2k\pi\end{cases}\\ &\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{aligned}}$$

b)
$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ &\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ &\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ &\sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ x=\pi-\alpha+2k\pi\end{cases}\end{aligned}}$$



c) $\boxed{\tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi}$

ملاحظات.

1) إذا كان $\alpha\notin[-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x=a$ و $\sin x=a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x))=a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases}u(x) \text{ معرفة}\\ u(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

3)
$$\boxed{\begin{aligned}&-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha) \qquad -\sin\alpha=\sin(-\alpha) \qquad -\tan\alpha=\tan(-\alpha)\\ &\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{aligned}}$$

4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

1) نضع $f(x)=a\cos(u(x))+b$ أو $f(x)=a\sin(u(x))+b$

*) إذا كان a و b غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$

*) إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x): a\tan(u(x))+b$ $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

5) صيغ التحويل

a)
$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}\\ &\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ &\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}\\ &\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{aligned}}$$

b)
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(2a)&=\cos^2 a-\sin^2 a\\ &=2\cos^2 a-1\\ &=1-2\sin^2 a\\ \sin(2a)&=2\sin a\cos a\\ \tan(2a)&=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\end{aligned}}$$

c)
$$\boxed{\begin{aligned}\cos^2 a&=\frac{1+\cos(2a)}{2}\\ \sin^2 a&=\frac{1-\cos(2a)}{2}\\ \sin a\cos a&=\frac{1}{2}\sin(2a)\end{aligned}}$$

d)
$$\boxed{\begin{aligned}\cos a\cos b&=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\\ \sin a\sin b&=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]\\ \sin a\cos b&=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]\end{aligned}}$$

e)
$$\boxed{\begin{aligned}\cos p+\cos q&=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-\cos q&=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}\\ \sin p+\sin q&=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q&=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}\end{aligned}}$$

f) نضع $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$: لدينا .

$$\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}}$$

g) من أجل تحويل $f(x)=a\cos x+b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned}f(x)&=a\cos x+b\sin x\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)\end{aligned}$$

مع $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$