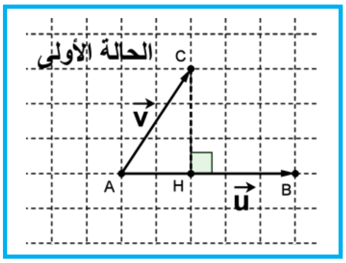
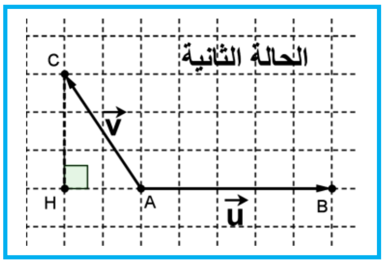
درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

I. الجداء السلمي في الفضاء:





لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي V_3 و A و B و C نقط من الفضاء (ع) حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو :

- في الحالة 1 هو: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$
- في الحالة 2 هو: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$

01. تعريف:

ليكن $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و H المسقط العمودي ل C على (AB).

الجداء السلمي ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و يرمز له ب $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ هو:

- العدد الحقيقي $AB\times AH$ إذا كان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس المنحى
- العدد الحقيقي $-AB\times AH$ إذا كان $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما منحيان $\neq$
- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=0$ (الجداء السلمي منعدم)

02. ملاحظات :

أ- $\vec{u}.\vec{u}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB\times AB=AB^2\geq 0$

ب- $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي ل $\vec{u}$ ويرمز له ب: $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$.

ج- العدد الحقيقي الموجب: $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويرمز له ب: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$

د- $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u}$

هـ- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أو $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

03. خاصيات:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات من V_3 و α من $\mathbb{R}$ لدينا :

أ- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (تماثلية الجداء السلمي).

ب- $\begin{cases}\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}\\ \left(\vec{v}+\vec{w}\right).\vec{u}=\vec{v}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{u}\\ \vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right)=\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v}=\alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)\end{cases}$ (خطانية الجداء السلمي)

ج- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

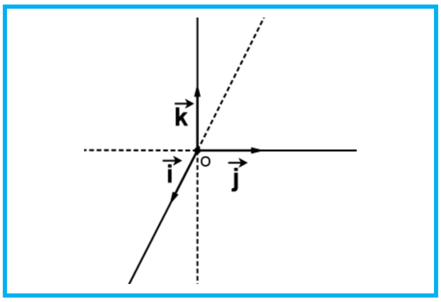
د- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

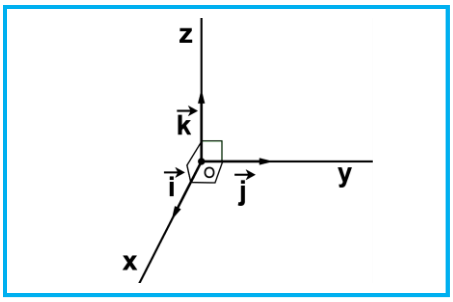
هـ- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

II. معلم متعامد ممنظم – أساس متعامد ممنظم.

01. تعاريف:

- $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 يكافئ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ غير مستوائية من الفضاء $\left(\det(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\neq 0\right)$
- أخذ نقطة 0 من الفضاء ؛الرباعي $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يسمى معلم في الفضاء،
نقول أن الفضاء منسوب إلى المعلم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أو أيضا الفضاء مزود بالمعلم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 هو أساس متعامد ممنظم يكافئ $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ و $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$.
و في هذه الحالة المعلم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يسمى معلم متعامد ممنظم





III. تحليلية الجداء السلمي في الفضاء

باقي فقرات الدرس المتبقية الفضاء نرمز له ب $(\mathcal{E})$ و منسوب إلى م.م.م $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتين من الفضاء V_3 و $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$ و $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ نقط معلومة من $(\mathcal{E})$

01. خاصيات:

- الجداء السلمي ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$
- منظم المتجهة $\vec{u}$ هو : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- المسافة بين A و B هي: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

IV. مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ مع $k\in\mathbb{R}$

01. خاصية:

$A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة و $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة من الفضاء و k من $\mathbb{R}$ ؛ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ هي مستوى معادلته تكتب على شكل : $ax+by+cz+d=0$.

02. مثال: $A(1,1,1)$ و $\vec{u}(0,1,0)$

نحدد (P) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ حيث : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

عندنا: $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 0.(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0$

$\Leftrightarrow y-1=0$

خلاصة : المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته : $y=1$

V. مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه:

01. متجهة منظمية على مستوى:

أ- تعريف:

متجهة منظمية على مستوى (P) هي: كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة و يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P).

ب- نتيجة:

$\vec{n}$ منظمية على المستوى (P) يكافئ أن: $\vec{n}$ متعامدة مع متجهتين موجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ للمستوى (P).

02. خاصية:

أ- خاصية :

a و b و c و d من $\mathbb{R}$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $ax+by+cz+d=0$ هي مستوى و المتجهة الغير المنعدم $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى.

ب- مثال:

ماذا تمثل مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق ما يلي : $x+2y-z+4=0$.
مجموعة النقط هي المستوى (P) حيث $\vec{n}(1,2,-1)$ منظمية على (P) و المارة من $A(0,0,4)$ (لإن إحداثيات A تحقق المعادلة)

ج- ملحوظة :

- المستوى السابق نرمز له ب: $P(A,\vec{n})$ أو $P\left(A\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix},\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$
- مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوى (P) المار من A و متجهة منظمية على (P) هي $\vec{u}$ (أي $P(A,\vec{n})$).

VI. مسافة نقطة عن مستوى :

01. تعريف:

(P) مستوى من الفضاء و A نقطة من الفضاء و النقطة H المسقط العمودي ل A على المستوى (P) المسافة AH تسمى المسافة للنقطة A عن المستوى (P) ونرمز لها ب : $AH=d(A,(P))$.

02. خاصية:

A نقطة من الفضاء و (P) مستوى من الفضاء الذي معادلته هي: $ax+by+cz+d=0$ مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي:
$$AH=d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

03. مثال:

لنعتبر المستوى $P(O,\vec{i},\vec{j})$ و النقطة $A(0,0,m)$ و $m\in\mathbb{R}$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

2) أحسب مسافة النقطة A عن المستوى (P).

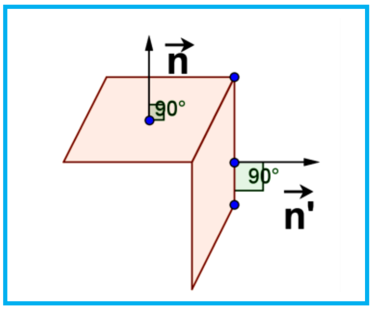
3) ماذا تمثل الحالة التي تكون فيها $d(A,(P))=0$.

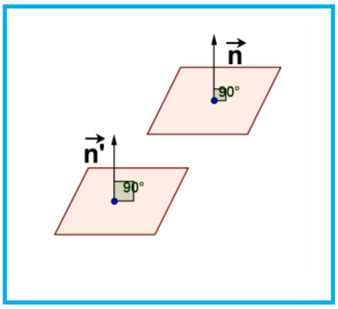
VII. الوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات و التعامد

01. خاصية 1:

$(P_1): ax+by+cz+d=0$ و $(P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0$ مستويين من الفضاء و $\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n'}(a',b',c')$ منظميتين على (P_1) و (P_2) على التوالي

- $(P_1)\parallel(P_2)$ يكافئ $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مستقيميتين
- $(P_1)\perp(P_2)$ يكافئ $\vec{n'}.\vec{n}=0$ (الجداء السلمي = 0)

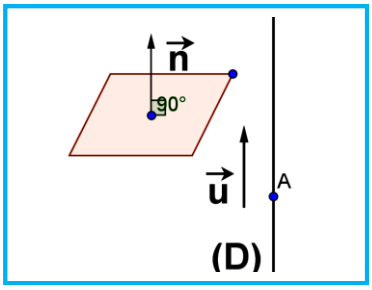


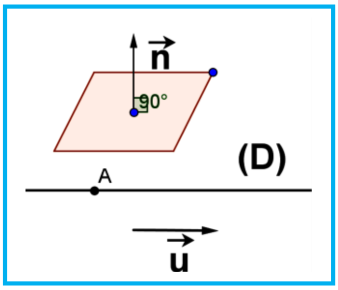


02. خاصية 2:

$P(A,\vec{n})$ مستوى من الفضاء و $D(A,\vec{u})$ مستقيم من الفضاء.

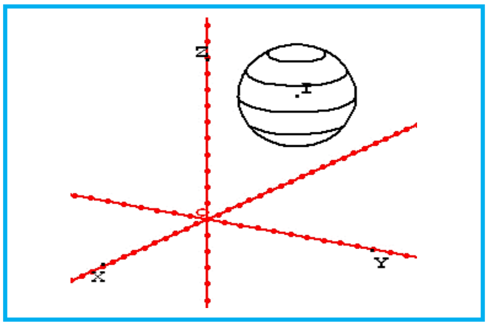
- $(D)\parallel(P)$ يكافئ $\vec{u}.\vec{n}=0$ (الجداء السلمي = 0)
- $(D)\perp(P)$ يكافئ $\vec{n}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين.





VIII. دراسة تحليلية للفلكة:

01. فلكة:



- تعريف:

Ω نقطة من الفضاء و R عدد حقيقي موجب قطعا $(R>0)$

الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = R$ ونرمز لها ب: $S(\Omega,R)$.

A و B نقطتين من (S) حيث Ω منتصف القطعة $[AB]$ هذه القطعة تسمى قطر للفلكة (S) ونرمز للفلكة كذلك ب: $S_{[AB]}$.

02. معادلة ديكارتية لفلكة $S(\Omega,R)$:

- خاصية:

معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega(a,b,c),R)$ هي :
- $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$ أو أيضا
- $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ مع $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

- مثال:

معادلة ديكارتية للفلكة $S(O,1)$ هي: $x^2+y^2+z^2=1$

03. معادلة ديكارتية لفلكة $S_{[AB]}$:

- خاصية:

A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء.
مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الفلكة $S_{[AB]}$ التي معادلتها الديكارتية هي:
$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

- مثال:

$A(0,1,0)$ و $B(0,-1,0)$. حدد معادلة ديكارتية للفلكة $S_{[AB]}$

$$M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1;\ \left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\right)$$

04. دراسة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, و (b c و d من $\mathbb{R}$)

- خاصية:

a و b و c و d من $\mathbb{R}$ حيث $R_2=a^2+b^2+c^2-4d$
(E) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ هي:

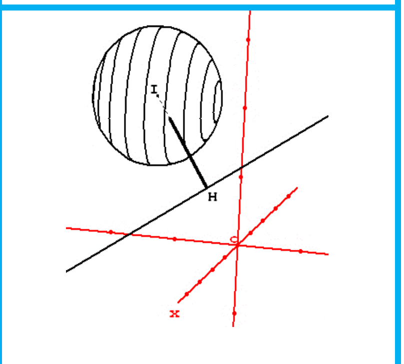
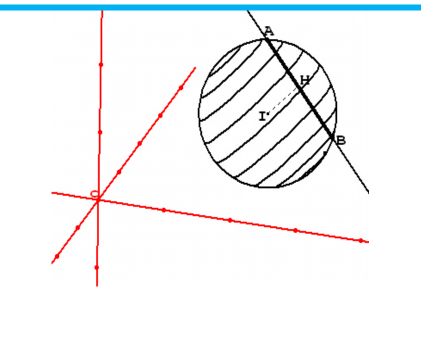
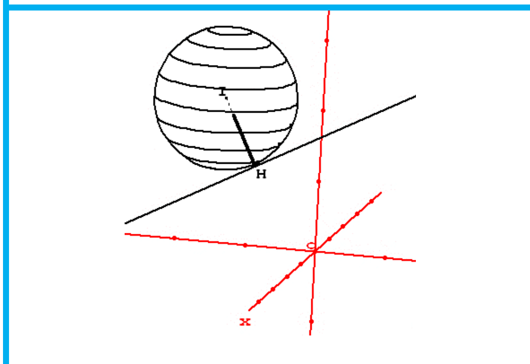
أ- الفلكة $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{R_2}}{2}\right)$
إذا كان $R_2>0$.

ب- $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ غذا كان $R_2=0$

ج- $(E)=\varnothing$ إذا كان $R_2<0$.

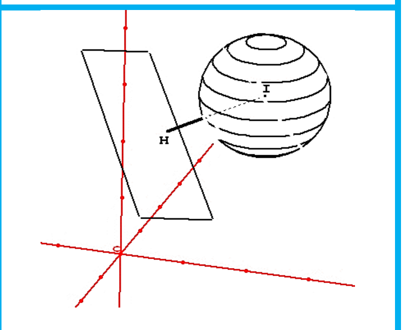
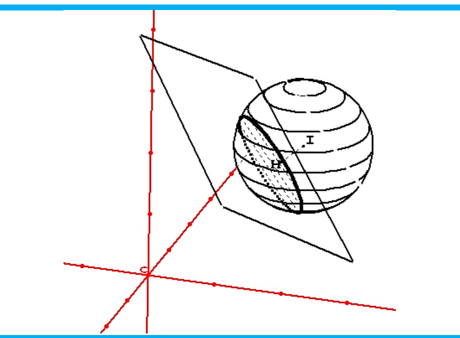
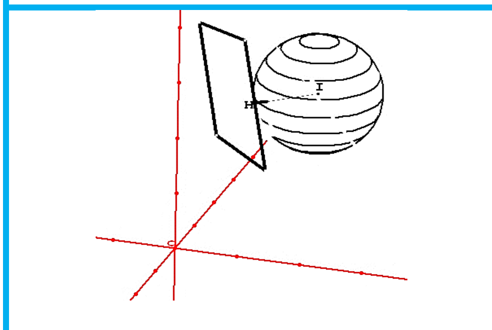
IX. تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستقيم $D(A,\vec{u})$

01. خاصيات:

H المسقط العمودي ل Ω على (D) و $d=\Omega H$		
حالة 1 : $(D)\cap(S)=\varnothing$	حالة 2 : $(D)\cap(S)=\{A,B\}$	حالة 3 : $(D)\cap(S)=\{H\}$
نقول : (D) خارج الفلكة (S)	نقول : (D) يقطع (S) في A و B	نقول : (D) مماس ل (S) في H
شرط : $d=\Omega H>R$	شرط : $d=\Omega H<R$	شرط : $d=\Omega H=R$
		

X. تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$

01. الأوضاع النسبية - خاصيات:

H المسقط العمودي ل Ω على المستوى (P) و $d=\Omega H$		
حالة 1 : $(P)\cap(S)=\varnothing$	حالة 2 : $(P)\cap(S)=(C)$	حالة 3 : $(D)\cap(S)=\{H\}$
نقول: (P) خارج الفلكة (S)	نقول: (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $R_C=\sqrt{R^2-d^2}$	نقول: (P) مماس للفلكة في النقطة H حيث المستقيم $(H\Omega)\perp(P)$
شرط: $d=\Omega H>R$	شرط: $d=\Omega H<R$	شرط: $d=\Omega H=R$
		

02. خاصية:

$S(\Omega,R)$ فلكة و A من (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس ل (S) عند النقطة A وهو المستوى العمودي على المستقيم $(A\Omega)$ في النقطة A أي : $M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$ ومنه معادلة (P) هي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$