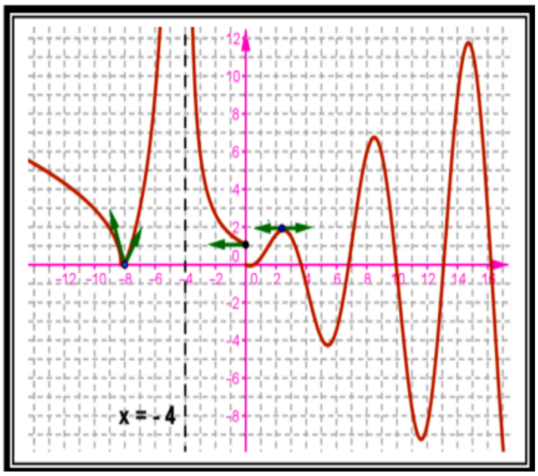
01



1. نتمم الجدول

$f\left(\frac{5}{2}\right)=1$ و $f'\left(\frac{5}{2}\right)=2$
$f(0)=1$ و $f_d'(0)=0$
$f(8)=-8$ و $f_d'(8)=2$ و $f_g'(8)=-3$
نسمي النقطة A التي أفصولها $x_0=-8$: نقطة مزواة
f ليست قابلة للاشتقاق في 8

02

1. أ) نحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{2015}-1}{x}$

لتكن الدالة f حيث $f(x)=(x+1)^{2015}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

لدينا $f(0)=1$

و منه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{2015}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=f'(0)$

نحدد $f'(x)$ $\quad f'(x)=\left[(x+1)^{2015}\right]'=2015(x+1)^{2014}$

إذن $f'(0)=2015$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{2015}-1}{x}=2015$

ب) نحدد تقريب تآلفي ل $\sqrt{16.05}$ و $(1.08)^3$

- لتكن $g(x)=\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة هي $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

لدينا $g(16)=4$ و $g'(16)=\dfrac{1}{8}$

و لدينا $\sqrt{16.05}=g(16.05)=g(16+0.05)$

إذن $\sqrt{16.05}=hg'(16)+g(16)=4.00625$ $\quad (h=0.05)$

- لتكن $l(x)=x^3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة هي $l(x)=3x^2$

لدينا $l(1)=1$ و $l'(1)=3$

و لدينا $(1.08)^3 = l(1.08) = l(1+0.08)$

إذن $(1.08)^3 = hl'(1)+l(1) = 1.24$ $(h=0.08)$

خلاصة : $\sqrt{16.05} \simeq 4.00625$ و $(1.08)^3 \simeq 1.24$

.03

1. أ) لدينا

$$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \qquad ; x \le 3$$

$$\lim_{x\to 2} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-\frac{1}{2}x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} -\frac{1}{2}x$$

$$= -1 \in \mathbb{R}$$

خلاصة : العدد المشتق للدالة f في 2 $x_0 = 2$ هو $f'(2) = -1$

ب) الدالة المقاربة ل f في 2 هي :

$$v : 2+h \to hf'(2)+f(2)$$

ج) نستنتج قيمة مقربة ل $f(1.999)$

لدينا

$$f(1.999) = f(2-10^{-3}) \qquad \left(h = -10^{-3}\right)$$

$$f(2-10^{-3}) \simeq -10^{-3}f'(2)+f(2) \qquad \left(f(2) = \frac{3}{2} \ ; \ f'(2) = -1\right)$$

$$f(1.999) \simeq 4.501$$

بالآلة الحاسبة $f(1.999) = 4.500999$

خلاصة : $f(1.999) \simeq 4.501$

2. ندرس قابلية الاشتقاق في 3.

- على يمين 3

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \qquad ; \quad x \rangle 3$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{x}{x-2}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3x+6}{(x-3)(x-2)}=-2\in\mathbb{R}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين 3 و $f_d'(3)=-2$

- على يسار 3

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}\quad ;\quad x\leq 3$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{2}-3}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2+2x+9}{2(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x-1}{2}$$

$$=-2\in\mathbb{R}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يسار 3 $f_g'(3)=-2$

خلاصة : f قابلة للاشتقاق في 3 لان $f_d'(3)=f_g'(3)=-2$

ب) نحدد معادلة ديكارتية للمماس لمنحنى f في $x_0=3$

لدينا :

$$y=(x-x_0)f'(x)+f(x)$$

$$=(x-3)(-2)+3$$

$$=-2x+9$$

خلاصة : $(T):2x+y-9=0$

.04

نحسب الدالة المشتقة f'

.1

$$\bullet f'(x)=\left[x^3+\frac{3}{7}x^2-4\right]'$$
$$=3x^2-\frac{6}{7}x$$

$$\bullet f'(x)=\left[x(2x-6)\right]'$$
$$=\left[2x^2-6x\right]'$$
$$=4x-6$$

$$\bullet f'(x)=\left[\frac{2x+3}{x-3}\right]'$$
$$=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{vmatrix}}{(x-3)^2}=\frac{-9}{(x-3)^2}$$

$$\bullet f'(x)=\left[2x-\frac{5}{x^2+3}\right]'$$
$$=2+\frac{10x}{(x^2+3)^2}$$

.2

$$\bullet f'(x)=\left[\sqrt{x^2+1}\right]'$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\bullet f'(x)=\left[\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right]'$$
$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(x-1)-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$
$$=\frac{-(x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$\bullet f'(x)=\left[\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}\right]'$$
$$=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{(x+3)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}}$$
$$=\frac{7}{2}\times\frac{1}{(x+3)^2\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}}$$

$$\bullet f'(x)=\left[\sqrt{x}\left(x^4+3x\right)\right]'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^4+3x\right)+\left(4x^3+3\right)\sqrt{x}$$

$$\bullet f'(x)=\left[(3x+2)^4\right]'$$
$$=12(3x+2)^3$$

.3

$$\bullet f'(x)=\left[\tan 2x\right]'$$
$$=2+2\tan^2 2x$$

$$\bullet f'(x)=\left[5\sin 3x+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$$
$$=15\cos 3x-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\bullet f'(x)=\left[\cos^2 x\right]'$$
$$=-2\cos x\sin x$$
$$=-2\sin 2x$$

05.

1. نحدد $f'(x)$ ثم تغيرات f

لدينا :

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$
$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$\Delta=144-108=36$$
$$x_1=3 \qquad x_2=1$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

2.

- f تقبل قيمة قصوى نسبية على $]-\infty;3]$ في $x=1$
- f لا تقبل مطارف مطلقة علي $\mathbb{R}$
- معادلة المماس لمنحنى f في $x=1$:

بما أن f قابلة للاشتقاق في $x=1$ و $f'(1)=0$ فان المماس (T) يوازي محور الأفاصيل

$(T): y=f(1)=5$

خلاصة : $(T): y=5$

06.

1. نحل المعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

لدينا $\omega = 2$ إذن المعادلة تكتب $y'' + \omega^2 y = 0$

تقبل كل الدوال التي على الشكل التالي مجموعة حلول هي :

$y = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$ (مع α و β من $\mathbb{R}$)

2. نحدد الدالة f التي تحقق $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$$\begin{cases} \alpha\cos 2\times\frac{\pi}{4} + \beta\sin 2\times\frac{\pi}{4} = 0 \\ \alpha\cos 2\times\frac{\pi}{2} + \beta\sin 2\times\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\times 0 + \beta\times 1 = 0 \\ \alpha\times(-1) + \beta\times 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

خلاصة : الدالة f هي $f(x) = y = -\cos 2x$

.07

1. نحدد السرعة التي من اجلها يكون استهلاك العربة دنويا :

- من اجل ذلك نحسب C' على $[10;130]$

$$C'(v) = \left[0.06\times v + \frac{150}{v}\right]' = 0.06 - \frac{150}{v^2} = \frac{0.06\times v^2 - 150}{v^2} = \frac{0.06(v-50)(v+50)}{v^2}$$

- ندرس إشارة C' : إشارة C' هي إشارة البسط

v	10		50		130
C'		-	0	+	
C		↘	6	↗	

خلاصة : السرعة التي يكون فيها استهلاك العربة دنوي هي 50km/h