

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} : \underline{\text{تمرين 1}}$$

$$Df = \{x \in IR / x+1 \neq 0\} = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$$

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

2

$$( \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 + 2x - 1 = -1 : \text{ لأن} ) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \left( \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(4x+2)(x+1)^2 - (2x^2 + 2x - 1) \times 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)[(4x+2)(x+1) - 2(2x^2 + 2x - 1)]}{(x+1)^4} = \frac{4x^2 + 4x + 2x + 2 - 4x^2 - 4x + 2}{(x+1)^3}$$

3

$$f'(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+2}{x+1}$$

$$(\Delta): y = 4x - 1 \text{ و } f'(0) = 4 \text{ إذن المماس في } x_0 = 0 \text{ هي: } f(0) = -1$$

4

بما أن

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	
$x+1$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	2	3	$-\infty$	2

5

حسب جدول التغيرات فالدالة  $f$  تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة  $A(-2;3)$ 

6

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x} ; x > 1 \\ f(x) = \sqrt{2-x} ; x \leq 1 \end{cases} : \underline{\text{تمرين 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2-x} = 1 \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} = 1 \text{ إذن } f \text{ تقبل نهاية في } 1$$

2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 + 1}{2x} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{2x} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x} = 0$$

3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2-x-1}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1-x}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = \frac{-1}{2}$$

إذن  $f$  قابلة للاشتغال يمين ويسار 1، ولدينا:  $f'_g(1) = 0$  و  $f'_d(1) = 0$

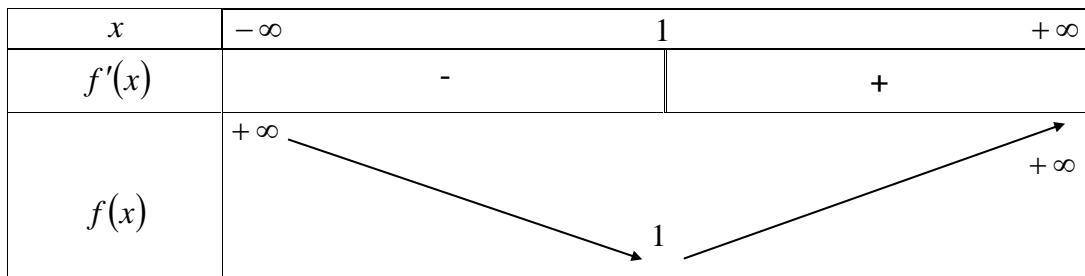
لكنها غير قابلة للاشتغال في 1 لأن:  $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

$(\Delta_g): \begin{cases} y = \frac{-1}{2}(x-1)+1 = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$  و  $(\Delta_d): \begin{cases} y = 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$  : معادلة نصفي الماس في النقطة ذات الأقصول 1

4

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2+1}{x} \right)' = \frac{1}{2} \frac{2x \times x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2-1}{x^2} ; x > 1 \\ f'(x) = (\sqrt{2-x})' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} ; x < 1 \end{cases}$$

بما أن  $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$  و  $\forall x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$  إذن:  $\forall x < 1 \Rightarrow f(x) < 0$  و  $\forall x > 1 \Rightarrow f(x) > 0$



تمرين 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

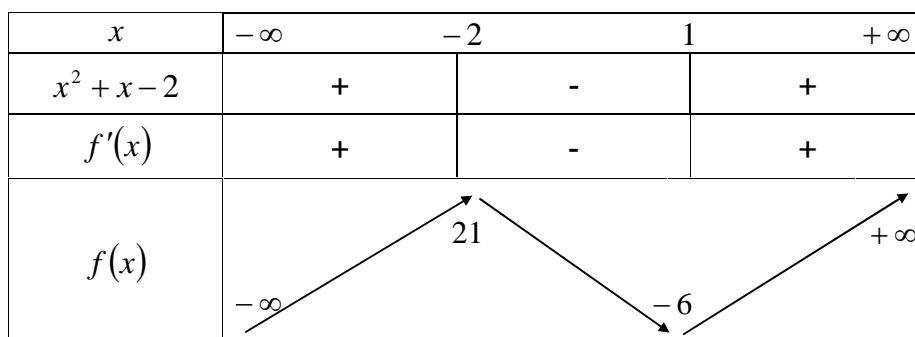
1

$$\forall x \in IR \quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

2

إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة الحدودية:  $x^2 + x - 2$

إذن هذه الحدودية تقبل جذريين مختلفين هما:  $r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$  و  $r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$   $\Delta = 1+8=9>0$



حسب جدول التغيرات فإن  $f$  تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة  $A(-2; 21)$  وقيمة دنوية نسبية في النقطة  $B(1; -6)$ ، لكن هذه النقط لا تمثل قيمًا مطلقة لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

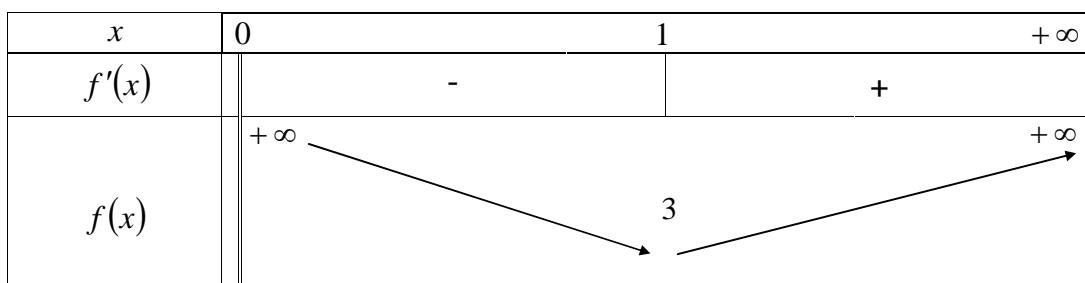
4

تمرين 4: لنبين أن:  $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$  على  $[0; +\infty]$  بدراسة الدالة  $\forall a > 0$ ;  $2a + \frac{1}{a^3} \geq 3$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^3 - 1) = \frac{2}{x^3}(x-1)(x^2 + x + 1)$$

ولدينا:  $\forall x > 0$  فإن إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة الحدانية  $x-1$  ، منه :



إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة دنوية مطلقة في النقطة  $A(1 ; 3)$  مما يعني أن :  $\forall x > 0 ; f(x) \geq 3$

$$\forall a > 0 ; 2a + \frac{1}{a^3} \geq 3 \quad \text{أو أيضا :}$$