

# VECTEURS DE L'ESPACE

## I) Vecteur de l'espace

1) si  $A, B$  sont deux points dans l'espace  $\mathcal{E}$

Si  $A$  et  $B$  sont distinctes alors ils forment un vecteur

noté :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Si  $A$  et  $B$  sont confondues alors :  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$  (vecteur nul)

### 2) Remarques :

a) Si  $O$  un point dans l'espace  $\mathcal{E}$  alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace il existe un point unique  $M$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  tel que :  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

b) L'ensemble des vecteurs de l'espace se note  $V_3$

c) Un vecteur non nul  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  est caractérisé par :

Sa direction : c'est la direction de la droite  $(AB)$

Son sens : de  $A$  à  $B$

Sa norme :  $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

d) Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$  ssi  $ABNM$  est un parallélogramme

e) Deux vecteurs peuvent avoir la même direction de tels vecteurs sont colinéaires

## II) LES OPERATIONS DANS $V_3$ .

### 1) L'addition.

**Définition :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $V_3$  ;

Soient les points  $O : A ; B$

tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$

la somme des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OD}$  tel que :  $OBDC$  est un parallélogramme

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

**Propriété :** L'addition dans  $V_3$  a les propriétés suivantes

$\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3 \forall \vec{w} \in V_3$

1)  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  2)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$

3)  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  4) Tout vecteur  $\vec{u}$  de  $V_3$  admet un

opposé noté  $-\vec{u}$  :  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

donc :  $(V_3, +)$  est un groupe commutatif.

Et on a donc :  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

### 2) Produit d'un vecteur par un réel.

**Définition :**  $\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3$  et  $k \in \mathbb{R}^*$

Si  $\vec{u}$  est non nul on pose :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

sur la droite  $(AB)$  il existe un seul point  $C$  tel que

$\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$

Le vecteur  $\vec{v} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$  s'appelle le produit du réel  $k$  et du vecteur  $\vec{u}$

on pose pour tout  $k$  dans  $\mathbb{R}$  :  $k\vec{0} = \vec{0}$  et  $0\vec{u} = \vec{0}$

on a :  $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$  ou  $k = 0$

**Propriété :**  $\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3$  et  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall \beta \in \mathbb{R}$  1)  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$  2)  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

3)  $1\vec{u} = \vec{u}$  4)  $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

on dit que :  $(V_3, +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel.

**Remarque :**

$\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3$  et  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  ;  $\forall \beta \in \mathbb{R}$

1)  $\alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v}$  2)  $(\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$

3)  $\alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$

## III) VECTEURS COLINEAIRES.

### 1) Vecteur colinéaires

**Définition :** On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que :

$\vec{v} = k.\vec{u}$

**Propriété :** Si on a :  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$  avec

$a \neq 0$  ou  $b \neq 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

### 2) Droite vectorielle

**Définition :** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur  $\vec{u}$  s'appelle : la droite vectorielle

engendrée par le vecteur  $\vec{u}$  et se note  $\Delta_{\vec{u}}$

$\Delta_{\vec{u}} = \{\vec{v} \in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k\vec{u}\}$

$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires

alors  $\Delta_{\vec{u}} \cap \Delta_{\vec{v}} = \{\vec{0}\}$

### 3) Détermination vectorielle d'une droite

**Définition :** Soient  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $A$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$ . L'ensemble des points  $M$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$  où  $k$  est un réel s'appelle la droite qui passe par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . On la

note par  $D(A; \vec{u}) : D(A; \vec{u}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\}$

**Remarque :**

- Le couple  $(A, \vec{u})$  détermine un repère sur la droite  $D(A; \vec{u})$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec  $\vec{u}$  est aussi vecteur Directeur de la droite  $D(A; \vec{u})$

**IV) VECTEURS COPLANAIRES.**

**1) vecteurs coplanaires.**

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et A un point l'espace on pose  $\vec{AB} = \vec{u}$ ,  $\vec{AC} = \vec{v}$  et  $\vec{AD} = \vec{w}$

On dit que : les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ssi les points A, B ; C et D sont coplanaires

**Propriété :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs dans l'espaces vectoriel Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

**Remarque :** si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurs sont coplanaires  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$

**2) Plan vectoriel**

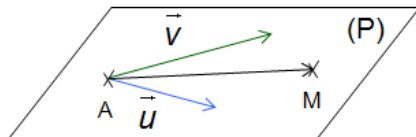
**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs  $\vec{w}$  dans  $V_3$  qui s'écrivent de la forme :  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$  où  $x$  et  $y$  sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$

**3) Détermination vectoriel d'un plan.**

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace  $\mathcal{E}$  l'ensemble des point M dans l'espace qui vérifient  $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , on le note par :  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$

$$P(A; \vec{u}; \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}\}$$

Le triplet  $R(A; \vec{u}; \vec{v})$  s'appelle un repère du plan (P) et le couple  $(x, y)$  s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R



**V) PARALLELISME DANS L'ESPACE**

**1) Parallélisme de deux droites**

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs et A et B deux points de l'espace

1)  $D(A; \vec{u}) \parallel D(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que :  $A \neq B$  et  $C \neq D : (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \vec{CD} = k\vec{AB}$

**2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.**

**Propriété :** La droite  $D(A; \vec{u})$  et le plan  $P(B; \vec{v}; \vec{w})$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

$$D(A; \vec{u}) \parallel P(B; \vec{v}; \vec{w}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

**3) Parallélisme de deux plans**

**Propriété :** Deux plans  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  et  $Q(B; \vec{u}'; \vec{v}')$  sont parallèles si et seulement si

$\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{u}'$  sont coplanaires et  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{v}'$  sont coplanaires aussi

**Remarque :** Une seule condition n'est pas suffisante

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien