MISE A NIVEAU

1) Calculs de base

1.1 : Les fractions

Soient a, b, c et d qutre nombres réels tels que : $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$
- $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{\frac{a}{b}}{c} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}}$

1.2 : Développement et factorisation :

Soient a, b et k trois réels :

- $k(a+b) = ka + kb$
- $k(a-b) = ka - kb$

1.3 : Puissances :

Soient a un réel et n un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$)

- $a^0 = 1$
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$ (pour $n \neq 0$)
- $a^n = a \times a^{n-1}$
- $a^{n+p} = a^n \times a^p$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- $a^{n-p} = \frac{a^n}{a^p}$
- $(a^n)^p = a^{np}$

Simplifier :

$A = \frac{2^5 \times 16^{-3}}{8^{-4} \times 32^2}$ et $B = \frac{(3^3)^{-2} \times 9^5}{27^3}$

1.4 : Identités remarquables :

Soient a et b deux réels.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Factoriser les expressions :
$A = x^2 + 3x - 4$
$B = x^3 - 8 + (x-2)(2x+1)$

Simplifier :
$A = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3}$
$B = \frac{5x^2 - 2x + 3}{x^3 - 1}$

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Factoriser : $A = a^4 - b^4$

1.5 : La racine carrée :

Soient a et b deux réels positifs :

- $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$
- $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- c un réel quelconque : $\sqrt{c^2} = |c|$.
- Le conjuguais de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ est $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

  Le conjuguais de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ est $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

  $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

$\sqrt{x(2x+3)} \neq \sqrt{x}\sqrt{2x+3}$ sauf si $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{\frac{1-x}{2x+1}} \neq \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}}$ sauf si $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$

Rendre le dénominateur rationnel :

$A = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}$ $\quad B = \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}$

2) Polynômes

Un polynôme s'écrit de la forme : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Si $a_n \neq 0$ l'entier n s'appelle le degré du polynôme

- Si $P(x)$ est un polynôme de degré n alors pour tout réel α on a :
  $\boldsymbol{P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)}$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$
- Si $\boldsymbol{P(\alpha) = 0}$ on dit que $\boldsymbol{\alpha}$ **est une racine** du polynôme P et on a :
  $\boldsymbol{P(x) = (x - \alpha)Q(x)}$ on dit que $P(x)$ est divisible par : $\boldsymbol{(x - \alpha)}$
- Division *Euclidienne (D.E)*

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 & x - 2 \\
\hline
- \; 2x^3 - 4x^2 & 2x^2 + 7x + 10 \\
\hline
7x^2 - 4x + 2 & \\
- \; 7x^2 - 14x & \\
\hline
10x + 2 & \\
- \; 10x - 20 & \\
\hline
22 &
\end{array}
$$

Dans cette D.E, il faut vérifier que $P(2) = 22$

Effectuer la D.E de

$P(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 4$

Par $(x + 1)$ puis factoriser $P(x)$

Simplifier :

$\frac{5x^3 - x^2 + 2x - 6}{2x^2 + 3x - 5}$ *(Remarquer que 1 est une racine pour les deux polynômes)*

2) L'ordre dans $\mathbb{R}$

- $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- si $a \leq b$ et $k \geq 0$ alors $ka \leq kb$
- si $a \leq b$ et $k \leq 0$ alors $ka \geq kb$
- si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ alors $a + c \leq b + d$
- si $\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases}$ alors $ac \leq bd$

$-5 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 25$

$-5 \leq x \leq 7$ alors $0 \leq x^2 \leq 49$

- Si $0 \leq a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$
- Si $a \leq x \leq b \leq 0$ alors $b^2 \leq x^2 \leq a^2$
- Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq 0 \text{ et } b \geq 0 \end{cases}$ alors $0 \leq x^2 \leq \sup(a^2, b^2)$
- Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $\mathbf{inf(ac, ad, bc, bd)} \leq xy \leq \mathbf{sup(ac, ad, bc, bd)}$

On ne fait jamais *la différence ou le quotient* **membre à membre**

Soit $a \in [-2,1]$ et $b \in [-5,7]$

Encadrer :

$A = ab + a - b$

$B = \frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$

3) La valeur absolue

- $|x| = x$ si $x \geq 0$
- $|x| = -x$ si $x \leq 0$
- Si $A(x) \geq 0$ alors $|A(x)| = A(x)$
- Si $A(x) \leq 0$ alors $|A(x)| = -A(x)$

- $|xy| = |x| \times |y|$
- $|x^n| = |x|^n$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4) Les intervalles.

- $x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$
- $x \in]a,b] \Leftrightarrow a < x \leq b$
- $x \in]a,b[\Leftrightarrow a < x < b$
- $x \in [a,+\infty[\Leftrightarrow x \geq a$
- $x \in]-\infty,b[\Leftrightarrow x < b$
- si $r \geq 0$ alors $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r,r]$
- $|x| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty,-r] \cup [r,+\infty[$

5) Signe de: $ax + b$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

6) Les trinômes : $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ c'est la forme canonique de f où $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme f

$f(x) = ax^2 + bx + c$

↓

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$ → $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ → Le signe de f est le signe de a

$\Delta = 0$ → $f(x) = 0$ a une seule solution $\alpha = \frac{-b}{2a}$ → $f(x) = a(x-\alpha)^2$ → Le signe de f est le signe de a

$\Delta > 0$ → $f(x) = 0$ a deux solutions $\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ → $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ →

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

7) les équations et les inéquations principales dans $\mathbb{R}$.

1. $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow ou \left| \begin{matrix} A(x)=B(x) \\ A(x)=-B(x) \end{matrix} \right.$
2. $|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow B(x) \geq 0 \; et \left(ou \left| \begin{matrix} A(x)=B(x) \\ A(x)=-B(x) \end{matrix} \right.\right)$
3. $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \text{ et } B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$

⚠ $|x+y| \neq |x| + |y|$
$|x+y| \leq |x| + |y|$
$|x-y| \leq |x| + |y|$

Déterminer :
$]-2,3[\cup [0,5[$
$[-7,2] \cap]-1,3]$

Résoudre :
$|3x+1| \leq 2$

Ecrire l'expression :
$A = |1-x| - 2|3x+6|$
sans valeur absolue sur des intervalle de $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$|3x+2| + 5x - 10 = 0$
$|3x+2| + 5x - 10 \geq 0$

Déterminer un réel m tel que :
$(\forall x \in \mathbb{R})(3x^2 - 2x + 1 \geq m)$

Factoriser :
$f(x) = 3x^2 - 2x - 5$

Soit $g(x) = 5x^2 - x - 4$
Remarquer que 1 est une racine de g puis factoriser g sans calcul

Pratiquement si on a une équation de la forme $|A(x)| = B(x)$ on discute deux cas :

- Si $B(x) < 0$ pas de solutions
- Si $B(x) \geq 0 \left| \begin{matrix} A(x)=B(x) \\ A(x)=-B(x) \end{matrix} \right.$

Résoudre $|3x^2 + x| = 1 - x$

Résoudre dans $\mathbb{R}$
$\sqrt{3x^2 + x} = \sqrt{1-x}$

4. $\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq B(x) \\ 0 \leq A(x) \end{cases}$ et $A(x) = B^2(x)$

5. $|A(x)| \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq B(x) \\ -B(x) \leq A(x) \leq B(x) \end{cases}$

6. $|A(x)| \geq B(x) \Leftrightarrow$ ou $\left| \begin{array}{c} B(x) \leq 0 \\ B(x) \geq 0 \ et \ (A(x) \geq B(x) \ ou \ A(x) \leq -B(x) \end{array} \right.$

7. $|A(x)| \leq |B(x)|$

8. $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq A(x) \\ 0 \leq B(x) \end{cases}$ $et\ A(x) \leq B(x).$

9. $\sqrt{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq A(x) \\ 0 \leq B(x) \end{cases}$ $et\ A(x) \leq B^2(x).$

10. $\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow ou \left| \begin{array}{c} B(x) \leq 0 \\ \begin{cases} 0 \leq A(x) \\ 0 \leq B(x) \end{cases} et\ A(x) \geq B^2(x) \end{array} \right.$

Applications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|2x^2 + 2x + 1| = 5$
2. $|2x + 1| = |x^2 + x + 1|$
3. $|x^2 + x + 2| = 4x - 1$
4. $\sqrt{3x^2 + x - 4} = \sqrt{3x + 4}$
5. $\sqrt{x^2 + x - 2} = 5x + 1$

On doit étudier deux cas :

- Si $B(x) < 0$ l'équation n'a pas de solutions.
- Si $B(x) \geq 0$ on passe au carré

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{3x^2 + x} = 4 - x$

On doit étudier deux cas :

- Si $B(x) < 0$ l'inéquation n'a pas de solutions.
- Si $B(x) \geq 0$ on passe à l'encadrement.

On peut utiliser un tableau

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|3x + 1| \leq 4 - x$

On doit étudier deux cas :

- Si $B(x) < 0$ l'inéquation est vérifiée
- Si $B(x) \geq 0$ on passe aux inéquations :

$A(x) \geq B(x)\ ou\ A(x) \leq -B(x)$

On peut utiliser un tableau

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|x + 2| \geq 2x + 1$

A cause des différents cas qu'on dans ce type d'inéquations il vaut mieux utiliser le tableau des signes.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|3x + 6| \geq |x^2 - x|$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x^2 - x} \leq \sqrt{2x + 1}$

Dans une telle inéquation on distingue deux cas :

$B(x) < 0$ pas de solutions

$B(x) \geq 0$ on passe au carrée.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x^2 - x} \leq x + 3$

On distingue deux cas :

$B(x) < 0$ L'inéquation est vérifiée

$B(x) \geq 0$ on passe au carrée.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x^2 + x} \geq 2x + 3$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|2x^2 + 2x + 1| \leq 5$
2. $|2x + 1| \geq |x^2 + x + 1|$
3. $|x^2 + x + 2| \leq 4x - 1$
4. $|x^2 + x + 2| \geq x - 1$
5. $\sqrt{3x^2 + x - 4} \leq \sqrt{3x + 4}$
6. $\sqrt{x^2 + x - 2} \leq 5x + 1$
7. $\sqrt{x^2 + x - 2} \geq x + 1$