

### Exercices de logique

#### Exercice (1)

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes

$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^+) \frac{1 + \sqrt{x}}{2} \leq m$	$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x + y > xy$	$(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}$
$(\forall x \notin \mathbb{Q}) x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$(\exists x \notin \mathbb{Q})(\exists y \notin \mathbb{Q}) xy \in \mathbb{Q}$	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) a^2 + b^2 = 1$

#### Exercice (2)

Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{1}{x} < x \Leftrightarrow \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \leq x \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

#### Exercice (3)

1) montrer que :  $(\forall (a,b) \in [2, +\infty[^2) a \neq b \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1 - \frac{4}{b^2}}$

2) soient  $b, a$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $a+b \neq 0$  . montrer que  $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq 3$

3)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \left( \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1} \right)$

- 4) a) quelle est la négation de la proposition  $P$  " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y - xy = 0$ "  
 b) montrer que  $P$  est fausse

#### Exercice (4)

Résoudre les inéquations :

1)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$                       2)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{11-x} \geq 2$

2) a) déterminer la négation de la proposition  $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : [a \neq b \Rightarrow a^2 \neq b^2]$

b) quelle est la valeur de vérité de la proposition

3) résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

1)  $E\left(\frac{3}{x+1}\right) = 2$                       2)  $E\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) = \frac{x}{2}$                       3)  $3E(2x - 1) = 2$

#### Exercice (5)

En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

1)  $9/16^n + 12n - 1$                       2)  $8/1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n$                       3)  $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$  ( $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ )

4)  $(\forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)$

5)  $\sum_{k=1}^{k=n} k(n+k) = \frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$                       6)  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

6)  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) (2 \times 3^2) + (2^2 \times 3^3) + \dots + (2^{n-1} \times 3^n) = \frac{18}{5} (6^{n-1} - 1)$

### Exercice (6)

1) montrer que  $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$

2) montrer que  $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x \neq y \Rightarrow (x-1)\sqrt{x+1} \neq (y-1)\sqrt{y+1}$

### Exercice (7)

Soit  $h$  la fonction définie de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  par  $h(0) = 3$  et  $h(n+1) = 2h(n) + 5$

1) a) calculer  $h(1)$  et  $h(2)$

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) > 0$  et déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n+1) - h(n) > 0$

2) montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) = 2^{n+3} - 5$

### Exercice (8)

1) monter que  $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \left( \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2} \right) \Rightarrow (x=1 \text{ et } y=2 \text{ et } z=3)$

2) montrer que  $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+*}) \quad \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$

3) soient  $b, a$  deux réels et  $c$  de  $\mathbb{R}^{+*}$  tels que  $|a+b| \leq c$  et  $|a-b| \leq c$

Montrer que  $|a| + |b| \leq c$  et  $|ab| \leq \frac{c}{4}$

4) soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (n-k)^2$

Calculer  $S_3$  puis montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

### Exercice (9)

On considère la proposition  $p_n$  " $(\forall n \geq 2) \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ "

1) montrer que  $p_n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$

2) comparer  $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$  et  $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n$

3) a) montrer que  $(\forall n \geq 2)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad (1+x)^n > 1+nx$

b) déduire que  $p_n$  est vraie

### Exercice (10)

1)  $x, y$  et  $z$  trois rationnels tels que  $x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 18$

Montrer que  $x \neq y$  ou  $y \neq z$  ou  $z \neq x$

2) a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y}\right) \Rightarrow (x=y)$

b) résoudre dans  $\mathbb{R}^+$  l'équation  $\sqrt{x+1} + \sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{x}$