

### Exercice 1

Déterminer la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- 1)  $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 < x$       2)  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 \geq n$       3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad x > \frac{1}{x}$   
 4)  $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) \quad x + y - 2 = 0$       5)  $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + y - 2 = 0$   
 6)  $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad xy + 2y + x + 2 = 0$       7)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n(n+1)+1} \in \mathbb{N}$

### Exercice 2

En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

- 1)  $(\forall x > 1)(\forall y > 1) : (x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$   
 2) soient  $z, y, x$  trois réels . montrer que :  $(x + y > 2z) \Rightarrow (x > z \text{ ou } y > z)$   
 3)  $b, a$  deux réels tels que  $b \neq 2a$  montrer que  $b \neq \frac{1}{4}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7}$   
 4)  $[(\forall x \in \mathbb{R}) : (a < x \Rightarrow b < x)] \Rightarrow (b \leq a)$   
 5) montrer que tout  $y, x$  de  $\mathbb{R}$  on a :  $(x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } y \neq \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow (xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \neq \frac{1}{\sqrt{2}})$

### Exercice 3

En utilisant l'absurde montrer que :

- 1)  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$       2)  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{n^2 + 7n + 12} \notin \mathbb{N}$   
 3) soient  $n$  un entier naturel impair et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des éléments distincts de  $E = \{1, 2, \dots, n\}$   
 Montrer que  $(\exists k \in E) \quad (n - k \text{ est impair})$   
 4) soient  $c, b, a$  des réels de  $\mathbb{R}^{+*}$  et tels que  $abc > 1$  et  $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$   
 a) montrer que  $a \neq 1$  et  $b \neq 1$  et  $c \neq 1$   
 b) montrer que  $a < 1$  ou  $b < 1$  ou  $c < 1$

### Exercice 4

Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

- 1) a) si  $n$  est non divisible par 3 alors  $n^2 - 1$  est divisible par 3  
 b) déduire que le nombre  $ab(a^2 - b^2)$  est divisible par 3 pour tous  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{N}$   
 2)  $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$       3)  $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

### Exercice 5

Montrer par récurrence que :

- 1) 9 divise  $4^n + 6n - 1$       2) 3 divise  $4n^3 - n$   
 3)  $7 / 3^{2n+3} + 2^{2n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$       4)  $11 / 9^{n+1} + 2^{6n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$   
 5)  $(\forall n \geq 1)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad (1+x)^n > 1+nx$       6)  $\sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$   
 7)  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$       8)  $\sum_{k=1}^{n-1} k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$   
 9)  $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\forall a \neq 1)(\forall n \in \mathbb{N}^*)$       10)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p^2}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$   
 11)  $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$       12)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 6

www.manti.on.ma

Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $[0,1]$  . on pose  $A = ab$  ;  $B = a(1-b) + b(1-a)$  et  $C = (1-a)(1-b)$

- 1) montrer que  $B \geq 2(\sqrt{ab} - ab)$
- 2) on suppose que  $A < \frac{4}{9}$  et  $B < \frac{4}{9}$  et  $C < \frac{4}{9}$ 
  - a) montrer que  $ab - \sqrt{ab} + \frac{2}{9} > 0$  puis déduire que  $ab < \frac{1}{9}$
  - b) montrer que  $C < \frac{4}{9} \Rightarrow a + b - ab > \frac{5}{9}$
  - c) montrer que  $B \geq \frac{4}{9}$  . que peut-on déduire

Exercice 7

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 on pose  $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$

- 1) montrer que  $(\forall n \geq 2) P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$
- 2) a) vérifier que  $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$
- b) déduire que  $(\forall n \geq 2) P_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$

Exercice 8

Soit  $a$  un élément de  $]0,1[$  .

- 1) montrer que  $(\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2) p \leq q \Rightarrow a^p \geq a^q$
- 2) a) montrer que  $a + a^2 + \dots + a^n = a \frac{1 - a^n}{1 - a}$
- b) déduire que  $1 - a^n \geq n(1 - a)a^{n-1}$
- 3) prends  $a = 1 - \frac{1}{n^2}$  et montrer que  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$

Exercice 9

- 1) montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) (2n + 1 \text{ est un carré parfait}) \Rightarrow (n + 1 \text{ est somme de deux carrés parfaits})$
- 2) a) montrer que  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
- b) déduire que pour tous réels  $c, b, a$  de  $\mathbb{R}^{*+}$  on a :  $\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$
- 3) montrer que la proposition  $(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}) \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$  est fausse
- 4) on pose  $A_n = \underbrace{777\dots7}_{n \text{ fois}}$  montrer que  $A_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$
- 5) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \left( \frac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{3} \in \mathbb{N} \right)$
- b) déduire que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$