

### Exercices d'applications

1. (Raisonnement direct) Soient  $a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}^+$

Montrer que si  $a \leq b$  alors  $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$  et  $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout  $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$  est divisible par 2 (distinguer les  $n$  pairs des  $n$  impairs).

4. (Absurde) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  Montrer que  $\sqrt{n^2+1}$  n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$  ?

6. (Récurrence) Fixons un réel  $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$ .

### Exercices.

**Exercice 1** : P, Q des propositions ; Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
4. Pour tout entier  $x$  il existe un entier  $y$  tel que pour tout entier  $z$  la relation  $z < y$  implique la relation  $z < x + 1$ .
5. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir
6. a)  $(P \text{ et } Q)$     b)  $(\text{non } P \text{ et non } Q)$     c)  $(P \Rightarrow Q)$

**Exercice 2** : Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes

En langage propositionnel. On note  $p$  : les chiens aboient et  $q$  : la caravane passe.

- a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
- b) Les chiens n'aboient pas.
- c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

**Exercice 3** : Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 - n$  est divisible par 6
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^5 - n$  est divisible par 30
- 3)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^7 - n$  est divisible par 42

**Exercice 4** : Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair)  $\Rightarrow$  (6 est un nombre premier)
2. ( $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnelle)  $\Rightarrow$   $[(\forall x \in \mathbb{R}) (1 + 2x < x^2)]$
3. (5 est positif)  $\Rightarrow$  (3 divise 18)

**Exercice 5** :

1) Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :

- a)  $x \in [1,2]$
- b)  $n$  divise 6

2) Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :

- a)  $x \in [1,2]$
- b)  $n$  divise 6.

**Exercice 6** : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x + 3 > 0$
2.  $\forall (a;b) \in \mathbb{Q}^{*2} : a\sqrt{2} + b \neq 0$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

**Exercice 7** : écrire la négation des propositions suivantes

Q;  $(\exists x \in \mathbb{R}) : x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 2019$

P;  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

**Exercice 8 :** Écrire à l'aide des Quantificateurs la phrase suivante :

- 1) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
- 2) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
- 3) « Pour tout entier  $n$ , il existe un unique réel  $x$  tel que  $x > n$  ».

**Exercice 9 :** Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

- 1) Tout entier naturel est pair ou impair.
- 2) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
- 3) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

**Exercice 10 :** Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes :

- 1)  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$  (où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).
- 2)  $f$  n'est pas constante sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 11 :** En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

si  $x \in ]1; +\infty[$  et  $y \in ]1; +\infty[$

$$x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$$

**Exercice 12 :** Etudier la vérité des propositions suivantes :

1.  $\exists x \in \mathbb{R} : |x^2 - x| + 3x = 0$
2.  $\exists x > 0 : x^2 + 3x = 0$

**« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

