

19-2020

Exercices de logique

Exercice 1

Montrer que chacune des propositions suivantes est fautive en justifiant par un contre-exemple

i) $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) (a+b)^2 = a^2 + b^2$

ii) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) |x+y| = |x| + |y|$

iii) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \frac{\cos 2\alpha}{2} = \cos \alpha$

Exercice 2

Déterminer la négation des propositions suivantes et donner leurs valeurs de vérité

p " $(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) 2x - 3y = \sqrt{2}$ "

q " $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 + xy + y^2 = 0$ "

r " $(\forall x \in [0,2]) \left(\exists y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \right) xy - x + 2y - 1 = 0$ "

Exercice 3

Dans chacun des cas suivant, déterminer la proposition vraie parmi les deux propositions P ; Q

1) P " $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) y = 2x + 1$ "

Q " $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y + 1$ "

2) P " $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) x - y = 3$ "

Q " $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) x - y = 3$ "

3) P " $(\exists x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q}) y = \sqrt{x}$ "

Q " $(\exists x \in \mathbb{Q}) x^2 = 3$ "

Exercice 4

1) soient a et b deux réels.

Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ax + b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$

2) soient a et b deux réels non nuls.

Montrer que : $(2x + 4y = 1) \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20$

3) soient a, b et c trois réels, c > 0

Montrer l'implication :

$(|a + b| \leq c \text{ et } |a - b| \leq c) \Rightarrow |ab| \leq \frac{c^2}{2}$

Exercice 5

En utilisant un raisonnement par contraposée montrer que :

$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) : (a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Rightarrow ab + a + b \neq -1$

$(\forall (x,y) \in]2, +\infty[^2) : (x \neq y) \Rightarrow (x^2 + 4x \neq y^2 + 4y)$

$(\forall x \in \mathbb{R}) : a < x \Rightarrow b \leq x \Rightarrow (a \geq b)$

Exercice 6

1) soient a, b et c des entiers relatifs.

on considère l'équation (E) $ax^2 + bx + c = 0$

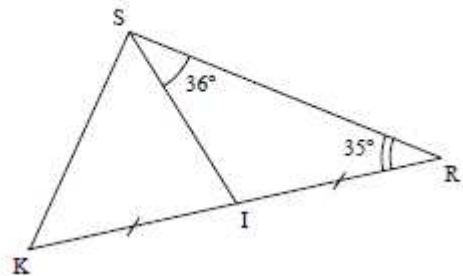
Montrer que si c est impair alors l'équation (E) n'admet pas de solution pair

2) montrer que le système $\begin{cases} 4x - 2y < 0 \\ y - 2x \leq -3 \end{cases}$ n'admet

pas de solution dans \mathbb{R}^2

3)

Le point K est le symétrique du point R par rapport au point I.
Le triangle KSR est-il rectangle en S ?



Exercice 7

Soient x, y et z des réels strictement positifs

tels que $x + y + z = 1$ montrer que :

$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3}$

Exercice 8

Soient a, b et c les mesures des cotés d'un triangle ABC montrer que :

1) $(a^3 + b^3 + c^3 = 3abc) \Leftrightarrow (ABC \text{ équilatéral})$

2) $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

proposée par : HIBA OUSSI