Exercices de logique

Exercice (1)

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes

$(\exists m\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \frac{1+\sqrt{x}}{2}\le m$	$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+)\ x+y>xy$	$(\forall x\in\mathbb{R})\ \frac{x}{1+x^2}\le\frac{1}{2}$
$(\forall x\notin\mathbb{Q})\ x+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$	$(\exists x\notin\mathbb{Q})(\exists y\notin\mathbb{Q})\ xy\in\mathbb{Q}$	$(\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R})\ a^2+b^2=1$

Exercice (2)

Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \sqrt{x}>2\ \Leftrightarrow$ .... ، $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2\le 16\ \Leftrightarrow$ ....

$(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ \frac{1}{x}<x\ \Leftrightarrow$ .... ، $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2\le x\ \Leftrightarrow$ ....

Exercice (3)

1) montrer que : $(\forall(a,b)\in[2,+\infty[^2)\ \ a\ne b\Rightarrow\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\ne\sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

2) soient b , a de $\mathbb{R}$ tels que $a+b\ne0$ $a+b\ne0$. montrer que $a\ne-\frac{1}{2}b\ \Rightarrow\ \frac{a-b}{a+b}\ne3$

3) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ (xy\ne1\ et\ x\ne y)\Rightarrow\left(\frac{x}{x^2+x+1}\ne\frac{y}{y^2+y+1}\right)$

4) a) quelle est la négation de la proposition P "$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})\ x^2+y-xy=0$"

b) montrer que P est fausse

Exercice (4)

Résoudre les inéquations :

1) $\sqrt{x^2-5x+6}>x+4$ 2) $\sqrt{x-1}-\sqrt{11-x}\ge2$

2) a) déterminer la négation de la proposition $(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b\in\mathbb{R}):\left[a\ne b\Rightarrow a^2\ne b^2\right]$

b) quelle est la valeur de vérité de la proposition

3) résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $E\left(\frac{3}{x+1}\right)=2$ 2) $E\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)=\frac{x}{2}$ 3) $3E(2x-1)=2$

Exercice (5)

En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

1) $9/16^n+12n-1$ 2) $8/1+5^{n+1}+2\times3^n$ 3) $\sum_{k=0}^{k=n}a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $(\ a\in\mathbb{R}-\{1\}\ )$

4) $(\forall n\in\mathbb{N}^+-\{1\})\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times.......\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

5) $\sum_{k=1}^{k=n}k(n+k)=\frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$ 6) $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}\le2\sqrt{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

6) $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})\ (2\times3^2)+(2^2\times3^3)+.......+(2^{n-1}\times3^n)=\frac{18}{5}(6^{n-1}-1)$

Exercice (6)

1) montrer que $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$

2) montrer que $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x \neq y \Rightarrow (x-1)\sqrt{x+1} \neq (y-1)\sqrt{y+1}$

Exercice (7)

Soit h la fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par $h(0) = 3$ et $h(n+1) = 2h(n) + 5$

1) a) calculer $h(1)$ et $h(2)$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ h(n) > 0$ et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ h(n+1) - h(n) > 0$

2) montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ h(n) = 2^{n+3} - 5$

Exercice (8)

1) monter que $(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \dfrac{x+y+z}{2}\right) \Rightarrow (x = 1 \ \ et\, y = 2 \ et \ z = 3)$

2) montrer que $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}) \quad \dfrac{a^2+1}{b} + \dfrac{b^2+1}{a} \geq 4$

3) soient b , a deux réels et c de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $|a+b| \leq c$ et $|a-b| \leq c$

Montrer que $|a| + |b| \leq c$ et $|ab| \leq \dfrac{c}{4}$

4) soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (n-k)^2$

Calculer S_3 puis montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice (9)

On considère la proposition p_n "$(\forall n \geq 2) \ \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1$

1) montrer que $p_n \Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \dfrac{1}{n}$

2) comparer $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left(1 + \dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$

3) a) montrer que $(\forall n \geq 2)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \ (1+x)^n > 1 + nx$

b) déduire que p_n est vraie

Exercice (10)

1) x , y et z trois rationnels tels que $x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 18$

Montrer que $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

2) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \ \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y}\right) \Rightarrow (x = y)$

b) résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{x}$