I. PROPOSITION - FONCTION PROPOSITIONNELLE – LES QUANTIFICATEURS :

A. PROPOSITION :

a. Définition :

On appelle une proposition un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps). Et , on note souvent une proposition par les lettres P , Q ou R ..etc. .

b. Valeur de vérité d'une proposition : vraie ou bien fausse présente la valeur de vérité de la proposition

- Si la proposition est vraie on note V ou 1 .
- Si la proposition est fausse on note F ou 0 .
- Tableau de vérité d'une proposition est ci-contre

p
1
0

c. Exemples :

P « 2 est un nombre pair » proposition est vraie . Q « 2+3 =6 » proposition est fausse .

R « ABCD est un parallélogramme alors les diagonales se coupe on leur milieux » . proposition est vraie

B. FONCTION PROPOSITIONNELLE

a. Définition :

On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé contenant une variable x ou plusieurs variables $(x,y,z,...)$ et qui appartiennent à des ensembles déterminé . on note $P(x)$ ou $P(x,y;z,....)$

b. Remarque : si on remplace les variables par un élément de ces ensembles , la fonction propositionnelle devient une proposition .

c. Exemple :

- $A(x)$: « pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $\sqrt{x^2}=x$ » est une fonction propositionnelle .
  - si $x=2$ on obtient une proposition vraie .
  - si $x=-3$ on obtient une proposition fausse .
- $A(x,y)$: « pour tout x et y de $\mathbb{R}$ on a : $|x+y|=|x|+|y|$ » est une fonction propositionnelle .
  - si $x=2$ et $y=5$ on obtient une proposition vraie .
  - si $x=-2$ et $y=5$ on obtient une proposition fausse .

C. les quantificateurs :

a. Quantificateur universel : l'expression suivante « pour tout x de E la proposition $Q(x)$ est vraie » . On la note : « $\forall x\in E , Q(x)$ » .

- Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout .. ou quel que soit ..
- Exemples : « $\forall x\in\mathbb{R} :\sqrt{x^2}=|x|$ » . « $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R} :|x+y|\leq|x|+|y|$ »

b. Quantificateur existentiel: l'expression suivante « il existe un x de E la proposition $Q(x)$ est vraie » . On la note : « $\exists x\in E , Q(x)$ » .

- Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe .. .
- Exemples : « $\exists x\in\mathbb{R} : x+4\leq 3$ » . « $\exists a\in\mathbb{R} , \exists b\in\mathbb{R} , \exists c\in\mathbb{R} : a^3+b^3=c^2$ » ($a=1;b=2,c=3$)

c. Le symbole $\exists!$: : l'expression suivante « il existe un unique x de E la proposition $Q(x)$ est vraie » . On la note : « $\exists! x\in E , Q(x)$ » .

- Exemple : « $\exists! x\in\mathbb{R} : x+4=3$ »

d. Remarques :

- L'ordre des quantificateurs identiques (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- L'ordre des quantificateurs non identiques (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.
- La négation du quantificateur : $\forall$ est le quantificateur $\exists$.
- La négation du quantificateur : $\exists$ est le quantificateur $\forall$.
- Les écritures suivantes sont équivalentes $\forall x \in E, \forall y \in E$ ou $\forall x, y \in E$ ou $\forall (x,y) \in E \times E$.
- Les écritures suivantes sont équivalentes $\exists x \in E, \exists y \in E$ ou $\exists x, y \in E$ ou $\exists (x,y) \in E \times E$.

II. OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :

01. La négation d'une proposition :

a. Définition :

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note $\overline{P}$ ou $\rceil P$ tel que les valeurs de vérité de P et $\overline{P}$ sont opposées .

b. Exemple : P « 2 est un nombre pair » sa négation est $\overline{P}$ « 2 est un nombre impair »

c. Tableau de vérité la négation d'une proposition :

p	$\overline{p} = \rceil p$
1	0
0	1

d. Propriété : $\overline{\overline{p}} = p$ ou encore $\rceil(\rceil p)$.

02. La conjonction de deux propositions - La disjonction de deux propositions .

A. La conjonction de deux propositions :

a. Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ ou bien P et Q ; $P \wedge Q$ est vraie seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraie .

b. Tableau de vérité de $P \wedge Q$ est :

p	q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

c. Exemple :

- $(2 \text{ est un nombre pair}) \wedge (2+3=6)$ est une proposition fausse.
- $(2 \text{ est un nombre pair}) \wedge (2+3=6)$ ou encore

  $(2 \text{ est un nombre pair})$ et $(2+3=6)$

B. La disjonction de deux propositions :

a. Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ ou bien P ou Q ; $P \vee Q$ est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses .

b. Tableau de vérité de $P \vee Q$ est :

p	q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

c. Exemple :

- $(2 \text{ est un nombre pair}) \vee (2+3=6)$

  ou encore $(2 \text{ est un nombre pair})$ ou $(2+3=6)$
- $(2 \text{ est un nombre pair}) \vee (2+3=6)$ est une proposition vraie .

d. Propriétés :

- La conjonction et la disjonction sont commutatives :
  - $P \wedge Q = Q \wedge P$

- ❖ $P \vee Q = Q \vee P$.
- La conjonction et la disjonction sont associatives :
  $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$; $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$.
- La négation de la conjonction et la disjonction :
  - ❖ $\rceil(P \wedge Q) = \rceil P \vee \rceil Q$ ou bien $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
  - ❖ $\rceil(P \vee Q) = \rceil P \wedge \rceil Q$ ou bien $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- La conjonction est distributive sur la disjonction - La disjonction est distributive sur la conjonction
  - ❖ $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ de même $(Q \vee R) \wedge P = (Q \wedge P) \vee (R \wedge P)$.
  - ❖ $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ de même $(Q \vee R) \wedge P = (Q \wedge P) \vee (R \wedge P)$.

e. Remarque :

- $P \wedge P = P$ de même $P \vee P = P$.

03. L'implication de deux propositions :

a. Définition :

l'implication de deux propositions P puis Q est la proposition $\overline{P} \vee Q$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$ on lit P implique Q . $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse .

b. Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$ est :

p	q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

c. Remarque :

- La proposition P s'appelle les données (ou hypothèses) de l'implication.
- La proposition Q s'appelle la conclusion de l'implication.
- L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse .
- L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ (vis versa)
- L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la contre posée de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- Si $P \Rightarrow Q$ on a pas forcément $Q \Rightarrow P$.

d. Exemple :

- $\underbrace{(2 \text{ est un nombre pair})}_{\text{vraie}} \Rightarrow \underbrace{(2+3=6)}_{\text{fausse}}$ est une proposition fausse.
- $\underbrace{(2+3=6)}_{\text{fausse}} \Rightarrow \underbrace{(2 \text{ est un nombre pair})}_{\text{vraie}}$ est une proposition vraie .

e. Propriétés :

- L'implication est transitive : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
- La négation de l'implication : $\rceil(P \Rightarrow Q) = \overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$.
- La contraposée : $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

04. L'équivalence de deux propositions :

a. Définition :

l'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ on lit P est équivalente à Q ou bien P si et seulement si Q . $P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité .

b. Tableau de vérité de $P \vee Q$ est :

p	q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

c. Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$

d. Propriètés :

- $(P \Leftrightarrow Q) = (Q \Leftrightarrow P)$; $(P \Leftrightarrow Q) = (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$.
- $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} = \overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)} = (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P})$
- L'équivalence est transitive : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

05. Lois logiques :

a. Définition :

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constitue .

b. Exemple :

- Lois de Morgan : $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$; $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$.
- $(P \wedge Q) \Rightarrow P$. Preuve : $((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Leftrightarrow \overline{(P \wedge Q)} \vee P$

$$\Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee P$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(\overline{P} \vee P)}_{\text{vraie}} \vee \overline{Q}}_{\text{est toujours vraie}}$$

Donc $(\overline{P} \vee P) \vee \overline{Q}$ est toujours vraie d'où $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ est une loi logique .

III. TYPES DE RAISONNEMENTS :

01. Raisonnement par contre exemple :

a. Définition :

Pour prouver que la propriétés suivante est fausse : $\forall x \in E , P(x)$ il suffit de prouver que $\exists x \in E , \overline{P(x)}$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$ ce qu'on appelle un contre exemple) .

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre exemple .

b. Exemple : est ce que la somme de deux nombres irrationnelle est un nombre irrationnelle ?

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnelle mais leur somme $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ n'est pas un nombre irrationnelle .

02. Raisonnement par des équivalences successives :

a. Définition :

Pour démontrer que l'équivalence suivant $P \Leftrightarrow Q$ est vrai , on démontrer que : $P \Leftrightarrow Q_1$ et $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ et $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$ et ….. et $Q_n \Leftrightarrow Q$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives .

b. Exemple : montrer que $\forall a,b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$.

On a : $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Conclusion : $\forall a,b \in \mathbb{R} : a^2+b^2 = 2ab \Leftrightarrow a=b$

03. Raisonnement déductif :

a. Définition :

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie .
Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **par déduction .**

b. Exemple :

1. On suppose qu'on a démontré : $\forall a,b > 0$, $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$.
2. On déduit que : $\forall x > 0$, $2\sqrt{x} \le 1+x$

D'après la 1ère question on pose $a=1$ et $b=x$ d'où $\sqrt{1\times x} \le \dfrac{1+x}{2}$ donc $2\sqrt{x} \le 1+x$

Conclusion : $\forall x > 0$, $2\sqrt{x} \le 1+x$

04. Raisonnement par la contraposée :

a. Définition :

Pour démontrer l'implication suivante $P \Rightarrow Q$ il suffit de démontrer l'implication suivante $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.
Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la contraposée .

b. Exemple : montrer que $\forall x,y \in]2,+\infty[$, $x \ne y \Rightarrow x^2-4x \ne y^2-4y$.

On utilise un raisonnement par contraposée pour cela on démontre :

$\forall x,y \in]2,+\infty[$, $x^2-4x = y^2-4y \Rightarrow x=y$.

Soient x et y de $]2,+\infty[$ tel que $x^2-4x=y^2-4y$.

$$\begin{aligned} x^2-4x=y^2-4y &\Rightarrow x^2-4x+4=y^2-4y+4 \\ &\Rightarrow (x-2)^2=(y-2)^2 \\ &\Rightarrow x-2=y-2 \text{ et } x-2=-(y-2) \\ &\Rightarrow x=y \text{ et } x+y-4=0 \\ &\Rightarrow x=y \end{aligned}$$

$x+y-4=0$ est impossible car $x>2$ et $y>2$ d'où $x+y>4$ ou encore $x+y-4>0$.

Donc $x^2-4x=y^2-4y \Rightarrow x=y$ est une implication vraie c.à.d. l'implication contraposée est vraie

Conclusion : $\forall x,y \in]2,+\infty[$, $x \ne y \Rightarrow x^2-4x \ne y^2-4y$

05. Raisonnement par disjonction des cas :

a. Définition :

Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par **disjonction des cas .**

b. Exemple : résoudre l'équation suivante $x \in \mathbb{R} : |x+1|+2x=0$.

L'équation s'écrit aussi $x \in]-\infty,-1] \cup [-1,+\infty[: |x+1|+2x=0$

1er cas $x \in]-\infty,-1]$

$|x+1|+2x=0 \Leftrightarrow -(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$

$\Leftrightarrow x=1\notin]-\infty,-1]$

D'où : $S_1=\varnothing$.

2ième cas $x\in[-1,+\infty[$.

$|x+1|+2x=0\Leftrightarrow (x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow 3x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\in[-1,+\infty[$

Donc : $S_2=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Conclusion : $S=S_1\cup S_2=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

06. Raisonnement par absurde :

a. Définition :

Pour démontrer qu'une proposition Q (conclusion ou résultat) et on a parmi les données la proposition P

- On suppose que $\overline{Q}$ (la négation du conclusion) est vraie et au cour de la démonstration on obtient que $\overline{P}$ est vraie d'où P et $\overline{P}$ sont vraies ce qui est impossible .
- Donc notre supposition $\overline{Q}$ est vraie est absurde ; d'où Q est vraie .
- Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **absurde .**

b. Exemple : soient r est un nombre rationnelle et i est nombre irrationnelle et $s=r+i$.
Montrer que : s est un nombre irrationnelle .
O suppose que s est un nombre rationnelle .
On a $s=r+i\Leftrightarrow i=s-r$

- d'où $s-r$ est un nombre rationnelle (1) car la somme de rationnelles est un nombre rationnelle .
- $i=s-r$ et i est nombre irrationnelle (2) .
- D'après (1) et (2) on a une contradiction d'où la supposition (s est un nombre rationnelle) est fausse

Conclusion : la somme d'un nombre rationnelle r et un nombre irrationnelle i est un nombre irrationnelle .

07. Raisonnement par récurrence :

a. Définition :

Soient $n_0\in\mathbb{N}$ et $P(n)$ une relation portant sur les entiers naturels n tel que $n\geq n_0$.

Pour démontrer que la relation $P(n)$ est vraie pour tout $n\geq n_0$. On utilise les étapes suivantes :

- On vérifie que : $P(n)$ est vraie pour $n=n_0$ (c.à.d. $P(n_0)$ est vraie) .
- On suppose que : $P(n)$ est vraie pour n avec $n\geq n_0$ .la supposition s'appelle hypothèse de récurrence
- On démontre que : la relation $P(n)$ est vraie pour $n+1$ (c.à.d. $P(n+1)$ est vraie)
- Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par raisonnement par **récurrence**

b. Exemple : montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}$ on a 3 divise n^3-n (c.à.d. $3|\left(n^3-n\right)$ (1))

Remarque : $3|\left(n^3-n\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n^3-n=3k$

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour $n=0$.

  Pour $n=0$ on a $n^3-n=0^3-0=0=3\times 0$ donc $3|\left(0^3-0\right)$ d'où la relation (1) est vraie pour $n=0$

- On suppose que : la relation (1) est vraie pour n (et n de $\mathbb{N}$) c.à.d. $3|\left(n^3-n\right)$, (ou $\exists k \in \mathbb{N} / n^3-n=3k$). hypothèse de récurrence

- On démontre que : la relation (1) est vraie pour $n+1$ (c.à.d. $3|\left((n+1)^3-(n+1)\right)$ est vraie)

  On a :

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-n-\cancel{1}\\ &= n^3-n+3n^2+3n\\ &= 3k+3\left(n^2+n\right) && \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= 3\left(k+n^2+n\right)\\ &= 3K && \left(K=k+n^2+n\in\mathbb{N}\right)\end{aligned}$$

  Donc : $(n+1)^3-(n+1)=3K$ par suite $3|\left((n+1)^3-(n+1)\right)$

  D'où la relation (1) est vraie pour $n+1$.

  Conclusion $\forall n \in \mathbb{N} : 3|\left(n^3-n\right)$

08. Symboles $\sum$ et $\prod$ et les lettres grecque :

a. Symbole $\sum$:

La somme suivante : $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ on la note par $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ (on utilise i ou j ou k sont des variables muettes)

- Exemple 1 : $2+4+6+\cdots+2n=\sum_{i=1}^{i=n} 2i$ (cet une somme qui est constitué par $n+1$ termes) .
- Exemple 2 : $1+3+5+\cdots+(2n+1)=\sum_{i=0}^{i=n}(2i+1)$ (cet une somme qui est constitué par n termes) .
- Propriétés :
  - ❖ $\sum_{j=0}^{j=n}\left(a_j+b_j\right)=\sum_{j=0}^{j=n}a_j+\sum_{j=0}^{j=n}b_j=\sum_{k=0}^{k=n}a_k+\sum_{k=0}^{k=n}b_k$.
  - ❖ $\sum_{j=1}^{j=n}\left(a_j+c\right)=\sum_{j=1}^{j=n}a_j+nc$ (car la somme contient n termes et chaque terme est a_i+c) .

b. Symbole $\prod$:

Le produit suivant : $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$ on la note par $\prod_{j=1}^{j=n} a_j$ (on utilise i ou j ou k sont des variables muettes)

- Exemple 1 : $\prod_{j=0}^{j=n}(a_j + b_j) = \prod_{j=0}^{j=n} a_j \times \prod_{j=0}^{j=n} b_j = \prod_{k=0}^{k=n} a_k \times \prod_{k=0}^{k=n} b_k$ (cet un produit qui est constitué par $n+1$ termes) .
- Exemple 2 : $\prod_{j=1}^{j=n}(ca_j) = c^n \prod_{j=1}^{j=n} a_j$ (cet un produit qui est constitué par n termes et chaque terme est $c \times a_i$) .

c. Exercices :

Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+3+\cdots+n = \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

d. Les lettres grecque :

ν	nu	α	alpha
ξ	xi	β	beta
o	omicron	γ ou Γ	gamma
π ou Π	pi	δ ou Δ	delta
ρ	rho	ε	epsilon
σ ou Σ	sigma	ζ	zêta
τ	tau	η	êta
υ	upsilon	θ ou Θ	thêta
φ ou Φ	phi	ι	iota
χ	chi	κ	kappa
ψ ou Ψ	psi	λ ou Λ	lambda
ω ou Ω	oméga	μ	mu