NOTIONS DE LOGIQUE

I) LES PROPOSITIONS ; LES FONCTIONS PROPOSITIONNELLES

1) Activité et définition

1.1 Activités :

Activité 1 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

p_1 " -6 est un entier relatif "

p_2 "$\sqrt{2} \leq 2$"

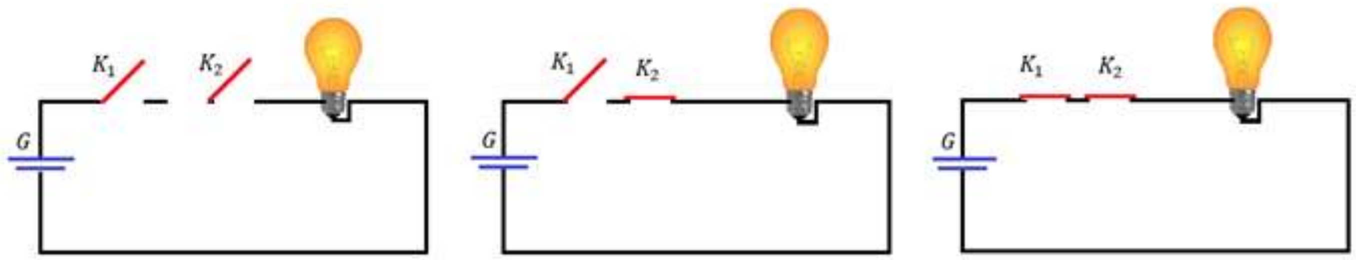
p_3 " $\frac{2}{3}$ est nombre décimale "

p_3 "$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} > \frac{19}{10}$ "

Activité 2 :

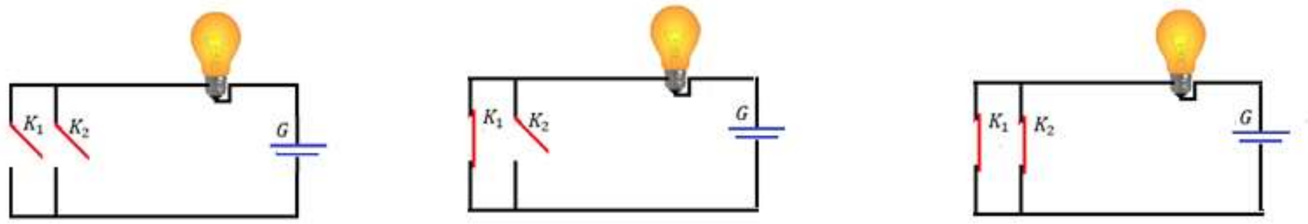
Voici 2 montages :

Montage en série :



❶ ❷ ❸

Montage en parallèle :



① ② ③

1- Si la lampe représente une lampe allumée, parmi les six images, déterminer celle qui sont valables.

2- Exprimer dans une phrase les conditions pour qu'une lampe soit allumée. (Pour les deux montages)

Activité 3 :

Soit $P(x)$ "$x \in \mathbb{R}$; $3x^2 - 2x - 1 = 0$" **($P(x)$ s'appelle une fonction propositionnelle)**

1- donner une valeur a_1 qui vérifie $P(a_1)$ est fausse.

2- donner une valeur a_2 qui vérifie $P(a_2)$ est vraie.

3- Que pouvez-vous dire de la proposition Q " ***pour tout x dans*** $\mathbb{R}$ *on a* ; $3x^2 - 2x - 1 = 0$"

4- Que pouvez-vous dire de la proposition R " ***il existe au moin x dans*** $\mathbb{R}$ *tel que* ; $3x^2 - 2x - 1 = 0$"

Activité 4 :

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble E et $\mathcal{V}_{P(x)} = \{x \in E \ / \ P(x) \text{ est vraie}\}$

Déterminer $\mathcal{V}_{P(x)}$ dans les cas suivants :

1- $P(x)$ " $x \in \mathbb{R}$; $4x^2 + x - 5 \leq 0$ "

2- $P(x)$ " $x \in \mathbb{R}$; $|3x^2 + x| + x = 0$ "

1.2 Définitions

Définition 1 :

Une **proposition** est un énoncé formé d'un assemblage de symboles et de mots, auquel une valeur de vérité *vrai* ou *faux* peut être attribuée

Exemple :

Les énoncés suivants sont des propositions :

p_1 " 3 est un entier pair "

p_2 " $\sqrt{2}$ est nombre positif "

p_3 " Un carrée est un parallélogramme "

p_4 " Dans l'espace si deux droites sont perpendiculaire toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

Déterminer la valeur de vérité de chaque proposition.

Définition 2 :

Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E.

2) Les quantificateurs

2.1 Quantificateur universel

Activité 1 :

Soit la fonction propositionnelle

$P(x)$: " $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$ "

Vérifier que $\mathcal{V}_{P(x)} = \mathbb{R}^{*+}$

On peut dire que : "**Quel que soit** $x \in \mathbb{R}^{*+}$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$ "

L'expression " Quel que soit " s'appelle **le quantificateur universel** et se note $\forall$

Remarque :

- ✓ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par **le quantificateur universel** on obtient une proposition.
- ✓ La proposition " $(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ est de valeur vraie si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{V}_{P(x)} = E}$.

Exercice :

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(2x^2 + x + 3 > 0)$
2. $(\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^{*2})(a\sqrt{2} + b \neq 0)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}\right)$

2.2 Quantificateur existentiel

Activité 1 :

Considérons l'équation (E) : $3x^2 + x - 2 = 0$

1. Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire de l'énoncé '' il existe au moins un réel tel que : $3x^2 + x - 2 = 0$
3. Déterminer $\boldsymbol{\mathcal{V}_{Q(x)}}$.

L'expression '' il existe au moins '' s'appelle **le quantificateur existentiel** et se note $\exists$

Remarque :

- ✓ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par **le quantificateur existentiel** on obtient une proposition.
- ✓ La proposition '' $(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ est de valeur vraie si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{V}_{P(x)} \neq \emptyset}$.

Exercice :

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $(\exists x \in \mathbb{R})(|x^2 - x| + 3x = 0)$
2. $(\exists x > 0)(x^2 + 3x = 0)$

2.3 Proposition avec plusieurs quantificateurs.

Considérons sur $\mathbb{R}^2$ la fonction propositionnelle $P_{(x,y)}$ '' $3x + y - 1 = 0$ ''

Les expressions :

1. $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$
4. $(\forall \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\ 3x + y - 1 = 0)$

Sont des propositions

Exercice

Déterminer les valeurs de vérité des propositions 1. 2. 3.

Remarque :

On admet que toute proposition et soit vraie soit fausse ; c'est ***le principe de tiers exclus***

Une proposition vraie se note par 1 ou V ; une proposition fausse se note par 0 ou F

II) OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS.

1. La négation

Définition

La négation d'une proposition P et la proposition qui vraie si P est fausse ; et qui est fausse si P est vraie on la note : $\overline{P}$ ou $\urcorner P$

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Ce tableau s'appelle le tableau de vérité de la négation

2. La conjonction

Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note $(\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{Q})$ ou $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$.

On peut résumer la définition précédente sur un tableau comme suite :

P	Q	$P \wedge Q$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ce tableau s'appelle le tableau de vérité de la conjonction

Exercice :

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) et (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) et [($\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) et (3 divise 18)

3 La disjonction

Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note $(\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{Q})$ ou $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$.

On peut résumer la définition précédente sur un tableau comme suite :

P	Q	$P \vee Q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	0	0

Tableau de vérité de la disjonction.

Exercice :

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) ou (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ou [($\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)$]
3. (5 est positif) ou (3 divise 18)

Un nombre irrationnelle est réel qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

4. L'implication

Exercice : Déterminer le tableau de vérité de la proposition $(\bar{P} ou\ Q)$.

Définition :

A partir de deux propositions P et Q on obtient la proposition $(\bar{P} ou\ Q)$ qui est fausse si P est vrai et Q est fausse et vraie dans les autre cas. La proposition $(\bar{P} ou\ Q)$ s'appelle $\boldsymbol{P\ implque\ Q}$ et se note $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$.

P	Q	$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

Tableau de vérité de l'implication.

Exemple :

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) ⇒ (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ⇒ $[(\forall x \in \mathbb{R})(1 + 2x < x^2)]$
3. (5 est positif) ⇒ (3 divise 18)

Remarque :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- **si** $ABCD$ est un carrée **alors** $ABCD$ est un parallélogramme.
- $ABCD$ est un carrée **implique** $ABCD$ est un parallélogramme.
- Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme **il suffit** qu'il soit un carrée.
- Pour que $ABCD$ soit un carrée **il faut** qu'il soit un parallélogramme

En générale : si on a : $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ on peut dire que :

Q est une condition nécessaire pour P

$ABCD$ un parallélogramme est nécessaire pour que $ABCD$ soit un carrée

P est une condition suffisante pour P

$ABCD$ un carrée est suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

Applications :

Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :

1. $x \in [1,2]$
2. n divise 6

Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :

1. $x \in [1,2]$
2. n divise 6.

5 l'équivalence

Activité :

1- Dresser le tableau de vérité de $[(\boldsymbol{P \Rightarrow Q})\boldsymbol{et}(\boldsymbol{Q \Rightarrow P})]$

2- Quand est ce que la proposition $[(\boldsymbol{P \Rightarrow Q})\boldsymbol{et}(\boldsymbol{Q \Rightarrow P})]$ est vraie ?

Définition :

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition qu'on note $(P \Leftrightarrow Q)$ est qui est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	**0**	**1**

Tableau de vérité de l'équivalence.

Remarques :

1- Les propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $[(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]$ ont les même valeurs de vérité, on dit que les deux propositions sont équivalente.

L'implication $(Q \Rightarrow P)$ s'appelle l'implication inverse de l'implication $(P \Rightarrow Q)$

2- $(P \Leftrightarrow Q)$ se lit P équivalent à Q elle se lit encore P si et selement si Q

6) Opérations sur les fonctions propositionnelles.

Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions propositionnelles sur un ensemble E alors :

$(P(x) * Q(x))$ est une fonction propositionnelle sur E et sa valeur de vérité pour tout élément a de E est la valeur de vérité de $(P(a) * Q(a))$

Où $*$ peut-être replacer par l'une des connexions logiques : et ; ou ; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$

Application :

Soient $P(x): 2x^2 + 1 \leq 5 \quad Q(x): x \in [1,3]$ deux fonctions propositionnelles sur $\mathbb{R}$

Déterminer les valeurs de vérités des propositions suivantes :

1- $P(0)\ et\ Q(0)$.

2- $P(3) \Rightarrow Q(3)$.

3- pour que $P(2)$ il suffit $Q(2)$

4- pour que $P(1)$ il faut $Q(1)$

Remarque : Pour montrer qu'une implication $(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ est vraie on suppose que $P(x)$ est vraie et on montre que $Q(x)$ est vraie.

III) LES LOIS LOGIQUES

1 Activités

Activité 1 :

En utilisant les tableaux de vérité ; déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1- $\left([(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q) \right)$

2- $\left[\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow R)\right]$ où l'accolade "{" représente la conjonction et.

Définition :

On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Une loi logique s'appelle aussi une ***tautologie***.

2. Quelques lois logique

La commutativité

- $(P\ et\ Q) \Leftrightarrow (Q\ et\ P)$
- $(P\ ou\ Q) \Leftrightarrow (Q\ ou\ P)$
- $(P \Leftrightarrow\ Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow\ P)$

La distributivité

- $[P\ et\ (Q\ ou\ R)] \Leftrightarrow [(P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)]$
- $[P\ ou\ (Q\ et\ R)] \Leftrightarrow [(P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)]$

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ (x+y)(5x+4y-3)=0 \end{cases}$$

Loi de Morgan

- $\overline{(P\ et\ Q)} \Leftrightarrow (\bar{P}\ ou\ \bar{Q})$
- $\overline{(P\ ou\ Q)} \Leftrightarrow (\bar{P}\ et\ \bar{Q})$

Application : Déterminer $\overline{(P \Rightarrow\ Q)}$.

3. lois logiques et raisonnement :

Les lois logiques servent à déterminer la valeur de vérité d'une proposition :

Activité :

Montrer que : $\left[(x \neq y\ et\ xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right]$

La contraposition

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

Application : Si x est un nombre réel tel que $x^3+x^2-2x<0$ alors $x\ <\ 1$.

La transitivité

- $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

  Cette loi est la base du raisonnement **par déduction** ; en générale

$$\begin{cases} P \Rightarrow Q_1 \\ Q_1 \Rightarrow Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \Rightarrow Q \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \text{On écrit} \quad \begin{array}{l} P \Rightarrow Q_1 \\ \quad \Rightarrow Q_2 \\ \quad \vdots \\ \quad \Rightarrow Q \end{array}$$

Application :

Montrer que : $|x|<1 \Rightarrow |2x^2-x-1|<2$

- $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

Cette loi est la base du raisonnement par les **équivalences successives** ; en générale

$$\begin{cases} P \Leftrightarrow Q_1 \\ Q_1 \Leftrightarrow Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \Leftrightarrow Q \end{cases} \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q) \quad \text{On écrit} \quad \begin{array}{l} P \Leftrightarrow Q_1 \\ \Leftrightarrow Q_2 \\ \vdots \\ \Leftrightarrow Q \end{array}$$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2+1} = 2x$

Raisonnement par disjonction des cas :

- $\begin{cases} \bar{P} \Rightarrow Q \\ P \Rightarrow Q \end{cases} \Rightarrow Q$

Si on montre que les deux applications $\bar{P} \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que Q est vraie.

Application :

Montrer que le reste de la division de n^2 par 3 ne peut jamais être égale à 2.

Raisonnement par absurde.

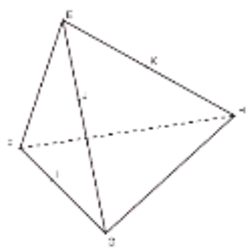
- $\begin{cases} \bar{P} \Rightarrow Q \\ \bar{P} \Rightarrow \bar{Q} \end{cases} \Rightarrow P$

Si on veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\bar{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie (puisque ***Q* est fausse****, l'implication $(\bar{P} \Rightarrow Q)$ ne peut être vraie que si $\bar{P}$ est fausse ou encore si P est vraie).

**Si Q est vraie ; puisque on a une loi logique donc les deux propositions : $\bar{P} \Rightarrow Q$ et $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ doivent être vraie en même temps d'où (puisque $\bar{P}$ est vraie) Q et $\bar{Q}$ doivent être vraie en même temps d'où Q est fausse

Application :

1- Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Montrer que $(\forall (h,k) \in \mathbb{Q}^{*2})(h\sqrt{2} + k \notin \mathbb{Q})$.



2- Soit $EFGH$ un tétraèdre ; I un point de $]FG[$; J un point de $]EG[$ et K un point de $]EH[$. Montrer que les droites (EI) et (JK) ne sont pas concourantes.

Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence :

> Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$.
>
> - S'il existe n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie
> - et si pour tout $n \geq n_0$ on a : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
>
> Alors on peut conclure que : $(\forall n \geq n_0)(P(n))$ est vraie.

En pratique pour montrer que $(\forall n \geq n_0)(P(n))$ est vraie ; On suit les étapes suivante :

- On montre que $P(n_0)$ est vraie
- On suppose que $P(n)$ est vraie (ça s'appelle l'hypothèse de récurrence : HR)
- On montre que $P(n+1)$ est vraie.

Application :

Montrer par récurrence les assertions suivantes :

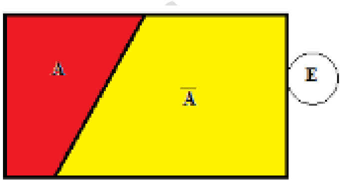
1- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(3| \ (3^n + 4^n - 1)$.

IV) NEGATION D'UNE PROPOSITION QUANTIFIEE.

1) Complémentaire d'un ensemble.

Définition :



Soit E un ensemble et $A \subset E$ on appelle complémentaire de A l'ensemble noté $\bar{A}$ et qui vérifie : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.

Exemple :

$\bar{E} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$

2) Négation d'une proposition quantifiée.

On sait que si $P(x)$ est une fonction propositionnelle sur E alors et si $\mathcal{V}_{P(x)} = \{x \in E / \ P(x) \ \text{est vraie}\}$ alors :

$\overline{\mathcal{V}_{P(x)}} = \{x \in E / \ P(x) \ \text{est fausse}\} = \{x \in E / \ \overline{P(x)} \ \text{est vraie}\} = \mathcal{V}_{\overline{P(x)}}$

Or on sait que : $(\forall x \in E)(P(x) \ \text{est vraie}) \Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} = E$ et $(\exists x \in E)(P(x) \ \text{est vraie}) \Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} \neq \emptyset$

et que $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q})$

donc :

$$\begin{aligned} \neg[(\forall x \in E)(P(x) \ \text{est vraie})] &\Leftrightarrow \neg[\mathcal{V}_{P(x)} = E] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V}_{P(x)} \neq E \\ &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{V}_{P(x)}} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V}_{\overline{P(x)}} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in E)(\overline{P(x)} \ \text{est vraie}) \end{aligned}$$

Théorème :

Si $P(x)$ est une fonction propositionnelle sur un ensemble E alors :

❶ $\neg[(\forall x \in E)(P(x) \ \text{est vraie})] \Leftrightarrow [(\exists x \in E)(\overline{P(x)} \ \text{est vraie})]$

❷ $\neg[(\exists x \in E)(P(x) \ \text{est vraie})] \Leftrightarrow [(\forall x \in E)(\overline{P(x)} \ \text{est vraie})]$

Applications

Donner les négations des propositions suivantes :

1-P_1: $(\forall x \in \mathbb{R})[(3x^2 + 1 > 0 \text{ et } \frac{x^2}{x+1} \leq 7)]$

2-P_2: $(\exists x \in [1,2])(x + 1 < x^2 \Rightarrow x \in [2,3])$

3- P_3 $(\forall x > 1)(\text{pour que } x \text{ soit positif il suffit que } x^2 + x + 1 \text{ soit positif})$

3-P_4: $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(2x + y + 1 = 0)$

Montrer que $\overline{P_4}$ est vraie en déduire la valeur de vérité de P_4

Exercice1 :

Après avoir déterminer la valeur de vérité de P_4 ; déterminer la valeur de vérité de

$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(2x + y + 1 = 0)$

Que remarquiez-vous.

Exercice 2 :

Montrer que $(\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2)(a = b \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(|a - b| < \epsilon)]$.

Propriété :

❶ $[(\forall x \in E)(P(x)\,] et [(\forall x \in E)(Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in E)(P(x)\ et\ Q(x))$

❷ $[(\exists x \in E)(P(x)\,] ou [(\exists x \in E)(Q(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in E)(P(x)\ ou\ Q(x))$

Propriété :

❸ $[(\forall x \in E)(P(x)\,] ou [(\forall x \in E)(Q(x) \Rightarrow (\forall x \in E)(P(x)\ ou\ Q(x)])$

❹ $[(\exists x \in E)(P(x)\ et\ Q(x) \Rightarrow (\exists x \in E)(P(x)\,] et [(\exists x \in E)(Q(x)])$

Remarque :

L'implication inverse de ❸ n'est pas vraie

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ est pair } ou\ n \text{ est impair})$ (cette proposition est vraie) ceci n'implique pas que

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ pair})$ ou $(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ impair})$ (cette proposition est fausse).

L'implication inverse de ❹ n'est pas vraie.

$[(\exists x \in \mathbb{R})(x > 0\,] et [(\exists x \in \mathbb{R})(x < 0]$ (cette proposition est vraie) ceci n'implique pas que

$(\exists x \in \mathbb{R})(x > 0 \text{ et } x < 0)$ (cette proposition est fausse).