

LIMITES – EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 2) $f(x) = -x^4$ 3) $f(x) = -3 + \frac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

4) $f(x) = -x^3$ 5) $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$ 6) $f(x) = \sqrt{-x}$

Déterminez les limites suivantes

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \frac{1}{x})$ 8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x})$ 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3)$ 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 4}$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2 + \frac{3}{x}}$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(-x + 1)$ 13) $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-3t(t - 4))$ 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{x} + 3 \right)$

Etudier le comportement de f lorsque x tend vers a avec :

15) $f(x) = \frac{1}{x - 2}, a = 2$ 16) $f(x) = \frac{-2}{x + 3}, a = -3$ 17) $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 0$

Exercice n°2.

Déterminer les limites de $f(x) = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)}$ en $x = 2$ et $x = -1$.

Exercice n°3.

Déterminez les limites suivantes

1) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}}$ en $+\infty$ 2) $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $-\infty$

Exercice n°4.

Vrai ou Faux ?

- 1) Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 2) Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe
- 3) Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

Exercice n°5.

f est une fonction numérique dont l'expression est $f(x) = ax + \frac{2}{x - b}$.

Déterminer a et b sachant que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11$

Exercice n°6. Déterminez les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 + 5x - 2$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$
 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 + 1}{4x + 16}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Exercice n°7.

Trouver deux fonctions f et g telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et telles que :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 1$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 7$

Exercice n°8.

Déterminez les limites suivantes : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x + 2)$

Exercice n°9.

1) Soit f une fonction telle que pour tout $x > 1$, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit f une fonction telle que pour tout $x > 1$, $\frac{2}{x} \leq f(x) - \frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?

- 3) $f(x) \geq 2x - 3$ 4) $f(x) \geq x^2 - 3$

Exercice n°10.

On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - \sqrt{x} + 4$

- 1) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$
 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice n°11.

Soit la fonction f définie sur $D = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

- 1) Démontrer que, pour tout x de D , on a : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$.
 2) Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$
 3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice n°12.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - \sin x$

- 1) Montrer que pour tout x réel $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$
 2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n°13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent):

- 1) $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$;

Exercice n°14.

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

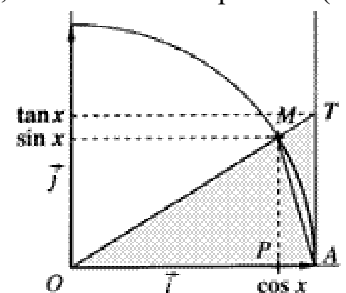
- 1) Montrer que pour $x > 0$, $x^2 < 1+x^2 < (1+x)^2$
 2) En déduire pour $x > 0$ un encadrement de $f(x)$.
 3) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice n°15.

Soit x un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1;0)$,

$M(\cos x; \sin x)$, $P(\cos x; 0)$ et $T(1; \tan x)$. Soit A_1 l'aire du triangle OAM , A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT .

- 1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.
 2) En déduire que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.
 3) Déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$).



Exercice n°16.

En utilisant le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

- 1) $x \rightarrow \frac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x \rightarrow \frac{x}{\sin 3x}$ 3) $x \rightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x \rightarrow \frac{\tan x}{x}$

Exercice n°17.

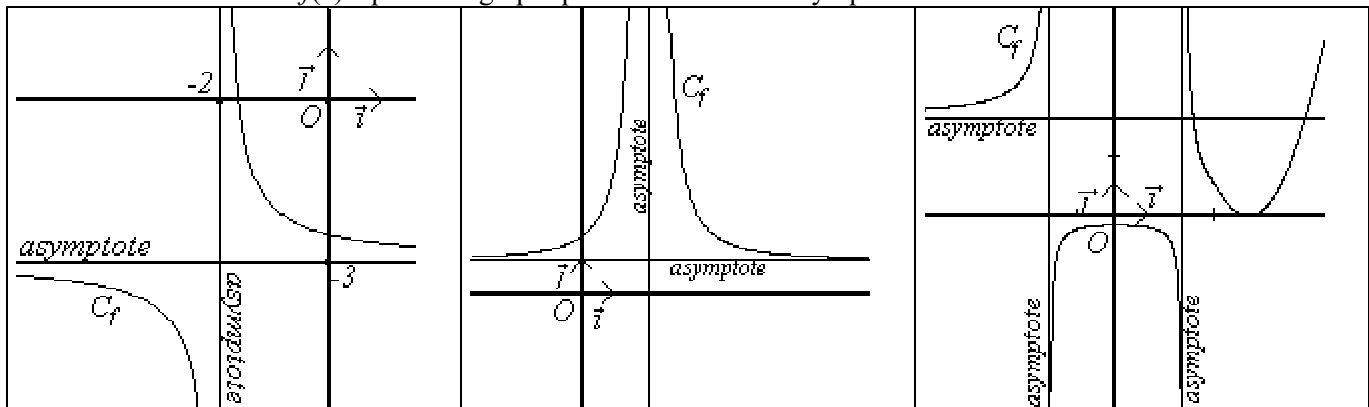
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

Exercice n°18.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{6x - \pi}$

Exercice n°19.

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes

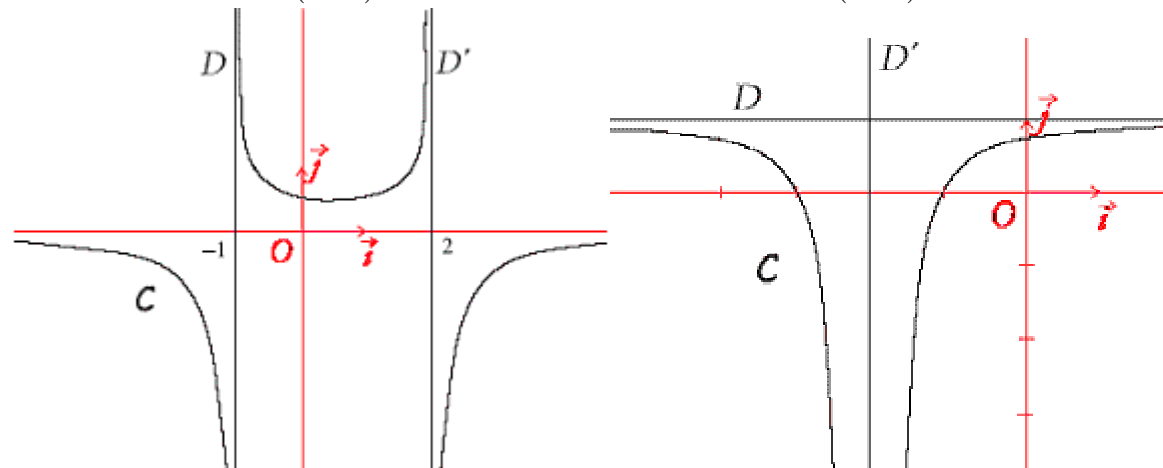


Exercice n°20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

1^{er} cas $f_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x) = -\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

2^{ème} cas $g_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$



Exercice n°21.

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \frac{3x-1}{x}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 4) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ 5) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Exercice n°22.

Soit f la fonction $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de f en 0 , $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de f et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n°23.

Soit f la fonction $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

- Déterminez trois nombres réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$ pour $x \neq -2$
- Etudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n°24.

Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Exercice n°25.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote pour $x \rightarrow +\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice n°26.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x + 3}$

- Quel est l'ensemble de définition D de f ?
- Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tout x de D , on ait : $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x + 3}$
- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax^2 + b))$
- Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^2 - 4$. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de x .

Exercice n°27.

Pour tout réel x non nul, on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{(50 + x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

- Peut-on conjecturer la limite de f en zéro ?
- En développant $(50 + x^{20})^2$, simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de f en zéro. Surprenant, non ?

Exercice n°28.

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4 + \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ (Poser $X = \frac{1}{x}$)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$ (Poser $X = 2x$)

Exercice n°29.

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4e^x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3e^x \right)$

Exercice n°30.

Étudiez les limites de la fonction f donnée aux bornes de son ensemble de définition D , et trouver les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f .

1) $f(x) = e^{-x} - 4$ 2) $f(x) = \frac{3}{1+e^x}$ 3) $f(x) = x - 2 + xe^x$ 4) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

Exercice n°31.

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- 1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$
- 2) Montrer que $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
- 3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe C .