

1) Règles de calcul : ( $a \in \mathbb{R}$ )

Somme	Produit	Rapport
$+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$(a > 0)$ ; $a \times (+\infty) = +\infty$ $(a < 0)$ ; $a \times (+\infty) = -\infty$	$\frac{1}{0^+} = +\infty$ ; $\frac{1}{+\infty} = 0^+$
$a + \infty = +\infty$ $a - \infty = -\infty$	$(a > 0)$ ; $a \times (-\infty) = -\infty$ $(a < 0)$ ; $a \times (-\infty) = +\infty$	$\frac{1}{0^-} = -\infty$ ; $\frac{1}{-\infty} = 0^-$
$+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$ <b>FI</b>	$(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$ et $0 \cdot (\pm\infty)$ <b>FI</b>	$\frac{0}{0} = \text{FI}$ et $\frac{\infty}{\infty} = \text{FI}$
<i>Limites remarquables pour la fonction circulaire</i>		
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

2) Méthodes de calcul des limites quand  $x$  tend vers un nombre  $x_0$  : ( $a \in \mathbb{R}$ )

## a) Cas des fonctions ; polynômes ou rationnelles ou irrationnelles :

Considérons la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

En général, on remplace la variable  $x$  par  $x_0$ . Trois cas se présentent :

**Premier cas :** on trouve un nombre « habituel »  $L$ , alors dans ce cas la limite c'est ce nombre  $L$ . On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

- **Calculons**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? : en remplaçons  $x$  par 1, on trouve  $\frac{-4}{3}$ , d'où :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{4}{3}$ .
- **Calculons**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ? : en remplaçons  $x$  par 0, on trouve  $\frac{-6}{4}$ , d'où :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{3}{2}$ .
- **Calculons**  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ ? : en remplaçons  $x$  par -3, on trouve  $\frac{0}{45}$ , d'où :  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$ .

**Deuxième cas :** on trouve  $\frac{0}{0}$ , c'est une forme indéterminée.

- **Calculons**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ? : en remplaçons  $x$  par 2, on trouve  $\frac{0}{0}$ .

Là on rappelle qu'un polynôme  $P(x)$  est divisible par  $x - a$  si et seulement si  $P(a) = 0$ . On en déduit que les deux polynômes  $x^2 + x - 6$  et  $x^2 - 6x + 8$  sont tous les deux divisibles par  $x - 2$ , d'où :

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}, \text{ en remplaçant une deuxième fois } x \text{ par } 2, \text{ on trouve } \frac{5}{-2}, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{5}{2}.$$

**Troisième cas :** on trouve  $\frac{a}{0}$  avec  $a \neq 0$ , d'après les règles de calcul la limite est  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

- **Calculons**  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ? : en remplaçons  $x$  par 4, on trouve  $\frac{14}{0}$ . On

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

$$\text{D'où : } f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2 + x - 6}{x-2} \times \frac{1}{x-4}.$$

$x$	$-\infty$	$4$	$+\infty$
$x-4$		$+$	$-$

D'après le tableau de signes de  $x-4$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

D'autre part on a :  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{14}{2} = 7$ , d'où enfin :  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$ .

### b) Cas des fonctions ; circulaires :

En général, on remplace la variable  $x$  par  $x_0$ . Dans le cas d'une forme indéterminée, on utilise les limites remarquables citées dans le tableau en haut.

### 3) Méthodes de calcul des limites quand $x$ tend vers l'infini :

a) **Théorème** :  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  avec  $a_n \neq 0$  est une fonction polynôme.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

**Démonstration** : on a écrit pour tout  $x$  non nul

$$f(x) = a_n x^n \left( 1 + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ , d'après le tableau en haut, ce qui fait

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

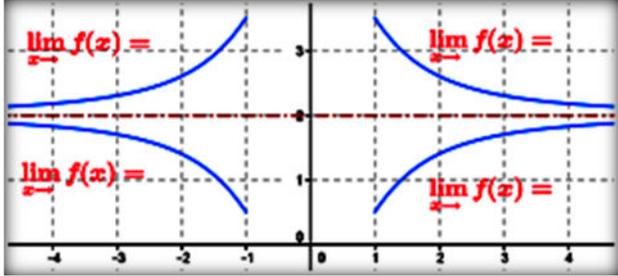
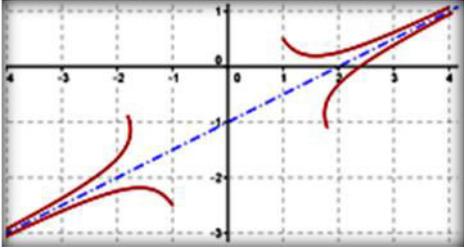
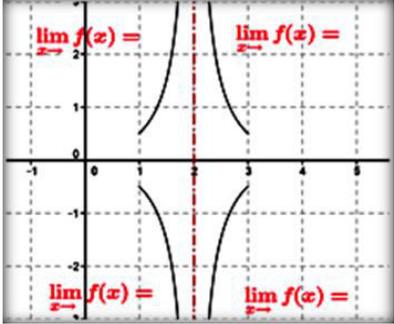
b) **Théorème** : Application aux fonctions polynômes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 3x^2 - 4x - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^5 = -\infty$

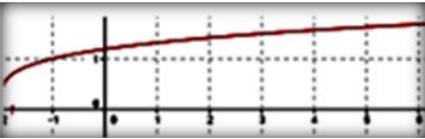
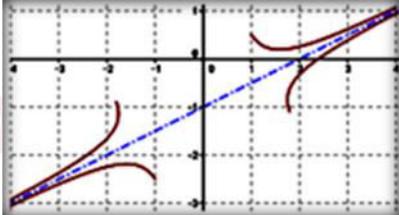
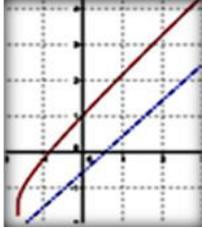
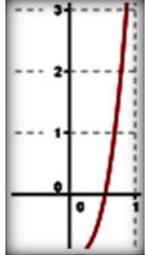
c) **Théorème** : Application aux fonctions rationnelles

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^7 + 3x^5 - 4x - 7}{2x^3 + 5x^2 - 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^7}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2} x^4 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x - 1}{3x^5 + 2x^3 - 8x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3} \times \frac{1}{x^3} = \frac{5}{3} \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 5x^4 - 3}{3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 11} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

Bonne Chance

<p style="text-align: center;"><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b</math></p>  <p style="text-align: center;">La droite <math>(\Delta)</math> d'équation <math>y = b</math> est une Asymptôte à <math>(C_f)</math> au voisinage de <math>\infty</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty</math></p> <p>La droite <math>(\Delta) : y = ax + b</math> est une Asymptôte oblique à <math>(C_f)</math> signifie que : <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0</math></p>  <p><math>(C_f)</math> est au dessus de <math>(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &gt; 0</math> <math>(C_f)</math> est en dessous de <math>(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &lt; 0</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty</math></p>  <p style="text-align: center;">La droite <math>(\Delta)</math> d'équation <math>x = a</math> est une Asymptôte à <math>(C_f)</math> au voisinage de <math>a</math></p>
---	---	--

**Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$**

<p style="text-align: center;"><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0</math></p>		<p style="text-align: center;"><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty</math></p>
	<p style="text-align: center;"><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \infty</math></p>	
 <p style="text-align: center;">La courbe <math>(C_f)</math> admet une branche parabolique de direction <math>(Ox)</math></p>	 <p style="text-align: center;">La droite <math>(\Delta)</math> d'équation <math>y = ax + b</math> est une Asymptôte à <math>(C_f)</math> au voisinage de <math>\infty</math>.</p>	 <p style="text-align: center;">La courbe <math>(C_f)</math> admet une branche parabolique de direction la droite <math>(D)</math>, d'équation <math>y = ax</math></p>	 <p style="text-align: center;">La courbe <math>(C_f)</math> admet une branche parabolique de direction <math>(Oy)</math></p>