

Limite d'une fonction : Exercices

**Limite d'une somme, d'une différence - forme indéterminée - asymptote**

Dans chaque cas, on donne la limite de  $f(x)$  et  $g(x)$ .

Déterminer si possible, la limite de  $f(x) + g(x)$  et de  $f(x) - g(x)$  et indiquer les éventuelles asymptotes.

$$a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \quad b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty \end{cases} \quad c) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \quad d) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -4 \end{cases}$$

**Limite d'un produit, d'un quotient - forme indéterminée - asymptote**

Dans chaque cas, on donne la limite de  $f(x)$  et  $g(x)$ .

Déterminer si possible, la limite de  $f(x) \times g(x)$  et de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  et indiquer les éventuelles asymptotes.

$$a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \end{cases} \quad b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \quad d) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

Dans chaque cas, on donne la limite de  $f(x)$  et  $g(x)$  et le signe de  $g(x)$ .

Déterminer si possible, la limite de  $f(x) \times g(x)$  et de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  et indiquer les éventuelles asymptotes.

$$a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

**Limite d'une fonction - forme indéterminée - asymptote**

Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1$$

Déterminer les limites suivantes et indiquer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-x} \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x - 1}{2x^2 + x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) \times \frac{1}{x + 1}$$

**Limite à gauche et à droite - asymptote**

Déterminer les limites suivantes. Indiquer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales :

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

Déterminer les limites suivantes. Indiquer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales :

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x + 5}{1 - x} \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x + 5}{1 - x} \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{1 - x}$$

**Limite d'une composée**

Déterminer les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x + 5}{x - 2}}$  c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \sqrt{\frac{4x + 5}{x - 2}}$

**Limite du type  $\frac{0}{0}$  - Utiliser la dérivation**

Déterminer les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x - 4}{x + 1}$

**Exemple de fonction n'ayant pas de limite**

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x)$ .

1°) Démontrer qu'on ne peut avoir  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , ni  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

2°) Calculer  $f(2\pi n)$  et  $f(2\pi n + \pi)$  où  $n$  est un entier naturel.

3°) En déduire que  $f$  n'a pas de limite finie en  $+\infty$ .

4°) Que peut-on conclure ?

5°) Comment adapter cette méthode, pour montrer que la fonction sinus n'a pas de limite.

On considère une fonction  $f$  définie et décroissante sur  $\mathbb{R}$ . On sait de plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

- 1°) Quelle conjecture peut-on faire sur  $f$  ?
- 2°) Démontrer cette conjecture.

### Limite et encadrement - théorème des gendarmes et de comparaison

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x - 2 \sin(x)} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x + \cos(x)}$$

Dans chaque cas, on considère une fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  vérifiant une condition donnée. Déterminer, si possible, la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $0$  :

- 1) Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) \geq \frac{1}{x}$ .
- 2) Pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + 1$ .
- 3) Pour tout  $x > 0$ ,  $|6 - 2f(x)| \leq \frac{1}{x}$ .

1°)  $f$  est une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  telle que  $f(x) \leq \frac{1}{x}$

- a) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier votre réponse.
- b) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Justifier votre réponse.

2°)  $f$  est une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  telle que  $f(x) \geq \frac{1}{x}$

- a) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier votre réponse.
- b) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Justifier votre réponse.

3°)  $f$  est une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  telle que pour  $x \geq 1$ ,  $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

- a) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier votre réponse.
- b) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Justifier votre réponse.

4°)  $f$  est une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  telle que pour  $x \geq 1$ ,  $1 - \frac{1}{x} \leq 2f(x) - 5 \leq 1 + \frac{1}{x^2}$

Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier votre réponse.

5°)  $f$  est une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  telle que pour  $x \geq 0$ ,  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$

- a) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier votre réponse.
- b) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Justifier votre réponse.
- c) Déterminer si possible  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Justifier votre réponse.

On considère une fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x^2}$

1°) A l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite  $\ell$  de  $f$  en  $+\infty$ .

2°) Démontrer que pour  $x \geq 1$ ,  $|f(x) - \ell| \leq \frac{1}{2x}$

3°) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

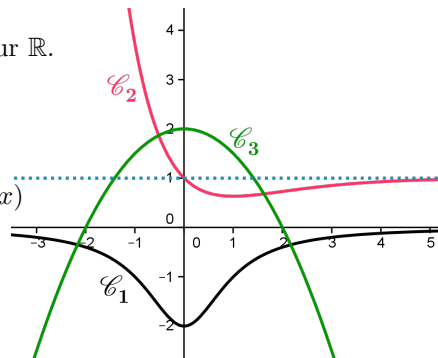
4°) Retrouver la limite de  $f$  en  $+\infty$  sans utiliser d'encadrement.

### Limite et opération

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  sont les courbes respectives de 3 fonctions  $f, g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$ .

- 1°) Déterminer graphiquement les limites de  $f, g$  et  $h$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
 2°) En déduire, si possible, les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x)$     b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times h(x)$     c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times h(x)$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + h(x)$     e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) - g(x)$     f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{g(x)}$     h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$     i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x))$



### Limite et tableau de variations de $-f, \frac{1}{f}$ et $|f|$

On donne le tableau de variations d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$4$	$+\infty$
$f$	$4$	$+\infty$	$-\infty$	$-5$

- 1°) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition.  
 Indiquer les équations des éventuelles asymptotes.  
 2°) Déterminer le tableau de variations des fonctions  $-f, \frac{1}{f}$  et  $|f|$ .  
 Préciser dans chaque cas, les limites aux bornes du domaine de définition.

### Déterminer une fonction connaissant le tableau de variations et les limites

On connaît le tableau de variations d'une fonction  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$0$	$+\infty$
$f$	$2$	$+\infty$	$1$	$2$

On sait de plus qu'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que pour tout  $x \neq -3, f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ .  
 Déterminer les valeurs de  $a, b, c$  en justifiant.

**Étude complète d'une fonction - Déterminer  $a, b, c \dots$**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$ .

1°) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \neq 2$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ .

2°) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

3°) Refaire le 2°) sans utiliser le 1°).

4°) Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$  5°) Déterminer  $f'(x)$ .

6°) Dresser le tableau de variation de  $f$

Préciser dans ce tableau les limites aux bornes du domaine de définition.

Indiquer les équations des éventuelles asymptotes.

7°) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b)$

Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?

Vérifier cette interprétation à l'aide de la calculatrice.

**Limite et racine - expression conjuguée**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$

1°) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

2°) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . On pourra utiliser l'expression conjuguée.

**Déterminer une fonction connaissant les limites**

Dans chaque cas, déterminer une fonction  $f$  vérifiant les conditions suivantes :

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

toto