

## Suites numériques

### Exercice 1

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

b) En déduire que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est bornée

### Exercice 2

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie par

$$: U_0 = -1 \quad , \quad U_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$$

1) on pose  $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$  et  $W_n = 2^n U_n$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite géométrique puis calculer  $V_n$  en fonction de  $n$

b) montrer que  $(W_n)_n$  est une suite arithmétique puis calculer  $W_n$  en fonction de  $n$

2) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

3) on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$  prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

### Exercice 3

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite telle que :

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} \left( U_n^2 - U_n + \frac{1}{2} \right)}$$

On pose  $V_n = U_n^2 - U_n$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

2) a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite géométrique

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$$

3) démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n - 1 \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

### Exercice 4

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie

$$\text{par : } U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2}$$

1) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < 6$

b) étudier la monotonie de  $(U_n)_n$

2) on pose  $V_n = \frac{U_n - 6}{U_n + 1}$  pour tout

entier naturel  $n$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite géométrique

b) déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

4) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - 6| \leq 5 \times \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

### Exercice 5

Soit  $(U_n)_n$  la suite telle que :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n^2 + U_n$$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

2) montrer que  $(U_n)_n$  est croissante

3) a) vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} \geq 2U_n$

b) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 2^n$

### Exercice 6

$(U_n)_n$  une suite telle que :

$$U_0 = -2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 2}{U_n - 2}$$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq -1$

2) montrer que  $(U_n)_n$  est croissante

## Suites numériques

3) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} + 1| \leq \frac{1}{2} |U_n + 1|$$

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_n + 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

### Exercice 7

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie

par :  $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (n+2)U_n}$  et  $U_0 = \frac{1}{3}$

1) calculer  $U_1$

2) on pose  $V_n = \frac{1}{U_n} - n$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite arithmétique

b) exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$

3) calculer en fonction de  $n$

la somme  $T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$

### Exercice 8

Soit la suite  $(U_n)_n$  telle que :

$$U_0 = 0 \text{ , } U_1 = 1 \text{ et } U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$$

1) on pose :

$$V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \text{ et } W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est géométrique puis déterminer  $V_n$  en fonction de  $n$

b) montrer que  $(W_n)_n$  est géométrique puis calculer  $W_n$  en fonction de  $n$

2) en déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$

### Exercice 9

On considère les suites  $(U_n)_{n \geq 1}$  et  $(V_n)_{n \geq 1}$

telles que  $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$  ,  $V_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) V_n < U_n$

2) montrer que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est

décroissante et que  $(V_n)_{n \geq 1}$  est croissante

### Exercice 10

( suite de Fibonacci )

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

1) a) montrer que  $U_n > 0$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

b) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_n$

2) montrer que  $U_n \geq n$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) montrer que  $U_n U_{n+2} + (-1)^{n+1} = (U_{n+1})^2$

4) on pose  $x_n = \frac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$  et  $y_n = \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$

pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) y_n - x_n = \frac{1}{U_{2n} U_{2n+1}}$$

en déduire  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < y_n - x_n < \frac{1}{n}$

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) x_{n+1} - x_n = \frac{1}{U_{2n} U_{2n+2}}$$

et  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) x_n = \frac{1}{y_n} - 1$

b) montrer que  $(x_n)_n$  est croissante et  $(y_n)_n$  décroissante

5) on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_k}{3^k}$

a) calculer  $3S_n$  puis  $3(3S_n - S_n)$

b) en déduire la relation liant

$$U_n ; S_{n-2} , S_n$$

6) prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

le nombre d'or :  $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$