

## Suites numériques

### Exercice (1)

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  telle que 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + 2u_{n-1}} : \forall n \geq 2 \end{cases}$$

On pose  $v_n = \frac{1}{u_n}$ .

1- montrer que  $(v_n)_n$  est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2- Calculer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de n.

3- On pose :  $w_n = 2^{v_n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

i-déterminer la nature de la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$ .

ii-Calculer la somme suivante :  $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$ .

### Exercice (2)

Soit les suites : 
$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_n = \frac{3u_{n-1} \times u_{n-2}}{2u_{n-1} + u_{n-2}} : \forall n \geq 2 \end{cases}$$

On pose  $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}$ .

1- montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est géométrique en déterminant sa raison q et son premier terme.

2- calculer la somme :  $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$

en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de n.

### Exercice (3)

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  les suites définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_{n+1} = \frac{n+3+2na_n}{3n+3} : \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad b_n = n(1-a_n)$$

1- montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n < 1$  et que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

2- montrer que  $(b_n)_n$  est une suite géométrique

3- calculer  $a_n$  en fonction de n .

4- calculer en fonction de n la somme  $S_n = \sum_{k=1}^n ka_k$ .

### Exercice (4)

$(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite arithmétique dont les termes sont toutes non nulles.

1- montrer que :

$$\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}} = \frac{n}{u_1 u_{n+1}}$$

2- calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$T_n = \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

### Exercice (5)

$(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & ; & v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + v_n}{6} & ; & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1- montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < v_n$

2- montrer que  $(u_n)_n$  est croissante et que  $(v_n)_n$  est décroissante.

3- montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(v_n - u_n).$$

4- déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n - u_n \leq 6 \left( \frac{5}{6} \right)^n$

### Exercice (6)

Soit la suite : 
$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \left( u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}} \right) \\ u_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

1- montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > \sqrt{2}$ .

2-a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left( u_n - \sqrt{2} \right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) déduire :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} \left( u_n - \sqrt{2} \right)$

et que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n - \sqrt{2} < \left( \frac{1}{2} \right)^n$ .

### Exercice (7)

Soient les suites :

$$\begin{cases} u_0 = 5 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n & ; & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- déterminer la nature de la suite  $(v_n)_n$ .

2- déterminer de deux manières la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k \quad \text{et déduire } u_n \text{ en fonction de n.}$$