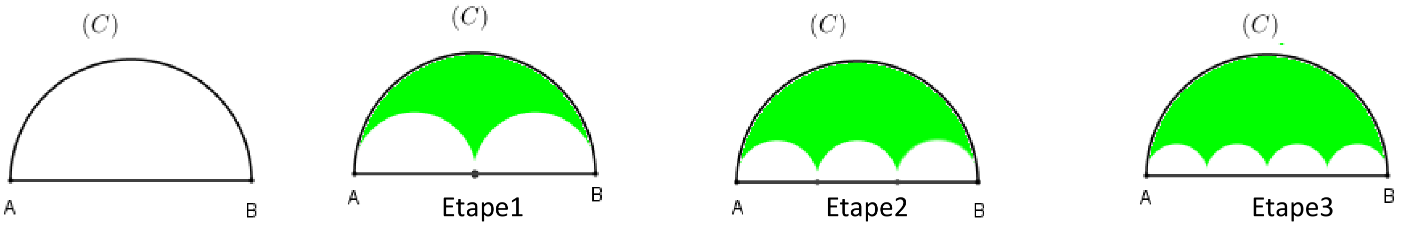
LES SUITES NUMERIQUES

I) ACTIVITES

1) En géométrie :

$(\mathcal{C})$ un demi-cercle de diamètre $[AB]$ avec $AB = 10cm$



On partage successivement le segment $[AB]$ en deux, puis trois puis quatre segments de même longueur. A chaque étape, on construit sur les segments obtenus des demi-cercles et on s'intéresse à l'aire du domaine coloré en vert.

On note a_1, a_2 et a_3 l'air du domaine coloré en vert aux étapes 1,2 et 3 décrites ci-dessus

1- Calculer a_1, a_2 et a_3.

2- A l'étape n, on partage le segment $[AB]$ en $n+1$ segments de même longueur, vérifier que $a_n = \frac{25\pi}{2} \times \frac{n}{n+1}$.

2) Que choisir ?

Une personne a reçu deux offres de deux société commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et un augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et un augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n.

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

II) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition :

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Notation :

Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

- l'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle **le terme** pour l'entier n
- L'entier n s'appelle **l'indice du terme u_n**
- La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

- Suite définie par : ***une expression explicite***
  Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n

$u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$; $v_n = \sqrt{n^2+1}$; $w_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$

- Une suite définie par :***une expression récurrente***
  Ces suites s'appelle des suites récurrentes, elle sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.
  - Suites récurrente du premier ordre

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2v_n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = -4 \\ w_{n+1} = \sqrt{2{w_n}^2 + 3} \end{cases}$$

  - Suites numériques du second ordre.

$$\begin{cases} u_0 = 2\,;\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = -2\ , v_1 = \frac{-1}{2} \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{u_n+2} \end{cases}$$

Remarque :

Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

2) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \geq 0)$

3- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 2)$

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est majorée** s'il existe un réel M tel que :$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \leq M)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est minorée** s'il existe un réel m tel que :$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \geq m)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est bornée** si elle est majorée et minorée.

Exercice :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n-1}{2u_n+3} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Propriété :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif α tel que $(\forall n \in \mathbb{I})(|u_n| \leq \alpha)$

3) Monotonie d'une suite.

Activité 1 :

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} \geq u_n)$

Activité 2 :

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{7v_n - 1}{2v_n + 3} \end{cases}$

Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_n$ (vous pouvez utiliser que : $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \leq v_n \leq 3)$)

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante si** : $(\forall (n,p) \in \mathbb{I}^2)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante si** : $(\forall (n,p) \in \mathbb{I}^2)(n \geq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est monotone** si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{I}$**.**

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante** si et seulement si: $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \geq u_n)$ **(P)**
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante** si et seulement si: $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \leq u_n)$

Démonstration :

✓ On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est croissante donc $(\forall (n,p) \in \mathbb{I}^2)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
d'où (et puisque $n+1 \geq n$) alors : $u_{n+1} \geq u_n$

✓ On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ vérifie la propriété **(P)**.
Soit n et p deux entiers tels que $n \geq p$ on a :
$u_p \leq u_{p+1} \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n$ donc la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ est croissante.

III) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

1.1 Définition

Activité :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = \frac{3n+1}{2}\right)$

Soit n un entier naturel, calculer : $u_{n+1} - u_n$

Définition :

On appelle suite **arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente :

$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{I})(\boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{r})$ où r est un réel fixe. Le réel $\boldsymbol{r}$ s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$.

Exemple :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$

Le premier terme et la raison d'une suite arithmétique s'appellent aussi les éléments de la suite arithmétique.

1.2 Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel on a :

$$\cancel{u_{p+1}} = u_p + r$$

$$\cancel{u_{p+2}} = \cancel{u_{p+1}} + r$$

$$\vdots$$

$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$$u_n = u_p + (\underbrace{r + r + \cdots + r}_{(n-p)termes})$$

D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes, on a :

$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n = u_p + (n-p)r)$

Remarque :

Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = u_0 + nr)$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = u_1 + (n-1)r)$

Applications :

❶ Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_{15} = 375$ et $u_{20} = 520$

1- Déterminer sa raison r

2- Déterminer son premier terme u_0.

❷ Soit $(w_n)_n$ tel que : $\begin{cases} w_6 + w_9 + w_{13} = 192 \\ w_4 + w_{15} = 130 \end{cases}$

Déterminer son terme w_{30}

1.3 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Activité

Montrer que $(\forall m \in \mathbb{N})(1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

Preuve d'une propriété :

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison , p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

On a : d'après le terme général d'une suite arithmétique : $(\forall n \in \mathbb{I})(u_n = u_p + (n-p)r)$

D'où :

$$u_p = u_p$$

$$u_{p+1} = u_p + r$$

$$u_{p+2} = u_p + 2r$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$S = \underbrace{(u_p + u_p + \cdots + u_p)}_{(n-p+1) termes} + r(1 + 2 + \cdots + (n-p))$ D'où :

$S = (n-p+1)u_p + r \times \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ En factorisant par : $\frac{(n-p+1)}{2}$, on obtient :

$S = \frac{(n-p+1)}{2}[2u_p + (n-p+1)r]$ et par suite :

$S = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + (u_p + (n-p)r)]$ En remarquant que : $u_n = u_p + (n-p)r$

Finalement : $S = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$

Propriété :

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

On a :

Nombre des termes

$$\boldsymbol{S = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]}$$

Dernier terme de S

Premier terme de S

1.4 Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a donc : $\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre on obtient : $b - a = c - b$ par suite : $2b = a + c$

Inversement : si a, b et c sont trois réels tels que $2b = a + c$ alors $b - a = c - b$ et par suite, a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = b - a$

Propriété :

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$

Application :

Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les termes consécutifs d'une suite arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

2) Suite géométrique.

Définition :

On appelle suite **géométrique** toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente :

$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{I})(\boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{q v_n})$ où q est un réel fixe. Le réel $\boldsymbol{q}$ s'appelle **la raison** de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$.

Exemple :

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \end{cases}$ la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2$

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

1.2 Terme général d'une suite géométrique

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite géométrique de raison q ; et p un entier naturel on a :

$$\cancel{v_{p+1}} = q \times v_p$$

$$\cancel{v_{p+2}} = q \times \cancel{v_{p+1}}$$

$$\vdots$$

$$v_n = q \times \cancel{v_{n-1}}$$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

$$v_n = (\underbrace{q \times q \times \ldots \times q}_{(n-p)fois})v_p$$

d'où $v_n = q^{n-p} \times v_p$

Propriété :

$\boxed{\text{Si } (v_n)_{n\in\mathbb{I}} \text{ est une suite géométrique de raison } q \text{ et si } p \text{ est un entier naturel alors : } (\forall n \in \mathbb{I})(v_n = q^{n-p} \times v_p)}$

Cas particuliers :

- ✓ $(\forall n \in \mathbb{I})(v_n = q^n \times v_0)$
- ✓ $(\forall n \in \mathbb{I})(v_n = q^{n-1} \times v_1)$

1.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p l'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

- Si $q = 1$ tous les v_i sont égaux et $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = \underbrace{v_p + v_p + \cdots + v_p}_{(n-p+1)termes} = (n-p+1)v_p$

- Si $q \neq 1$

On a : $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

Donc : $qS = qv_p + qv_{p+1} + \cdots + qv_n$

$$= v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_{n+1}$$

Par suite : $S - qS = (v_p + \cancel{v_{p+1}} + \cdots + \cancel{v_n}) - (\cancel{v_{p+1}} + \cancel{v_{p+2}} + \cdots + v_{n+1})$

$$= v_p - v_{n+1}$$

$$= v_p - q^{n-p+1}v_p$$

$$= v_p(1 - q^{n-p+1})$$

Donc $S(1-q) = v_p(1 - q^{n-p+1})$

Finalement : $S = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Propriété :

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p l'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

- Si $q = 1$ alors : $S = (n-p+1)v_p$
- Si $q \neq 1$ alors :

Nombre des termes

$$S = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

La raison de la suite

Premier terme dans S

<u>Propriété :</u>

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

<u>Preuve :</u> (En exercice)

<u>Application :</u>

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1+x^2)$; $(3+x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.