

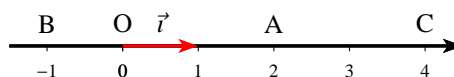
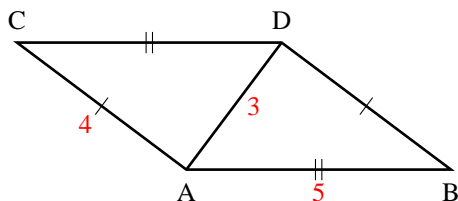
EXERCICES

Série D'exercices sur Le produit scalaire dans le plan

Sur les trois expressions du produit scalaire

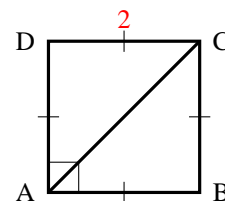
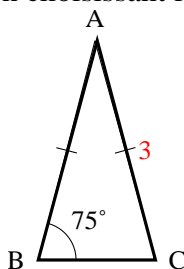
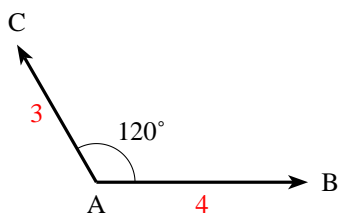
EXERCICE 1

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ pour les 2 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :



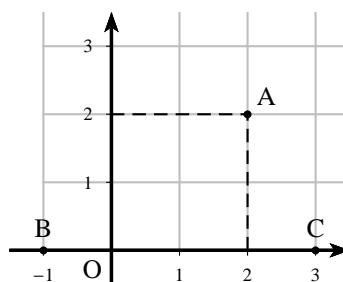
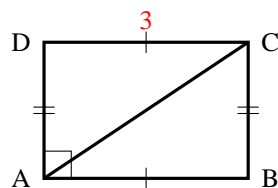
EXERCICE 2

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ pour les 3 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :



EXERCICE 3

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ pour les figures suivantes en choisissant la définition la mieux adaptée :

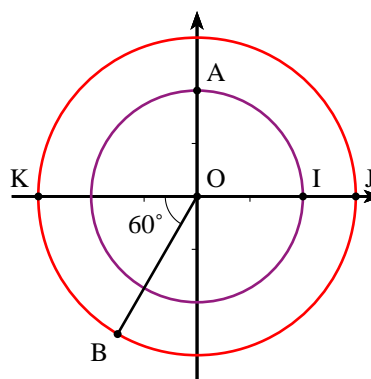


EXERCICE 4

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

- a) $\vec{OI} \cdot \vec{OJ}$
- b) $\vec{OI} \cdot \vec{OK}$
- c) $\vec{OI} \cdot \vec{OB}$
- d) $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$



2) Prouver que dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les coordonnées de B sont $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\vec{OA} \cdot \vec{AI}$

b) $\vec{IA} \cdot \vec{IJ}$

c) $\vec{BK} \cdot \vec{BA}$

EXERCICE 5

À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

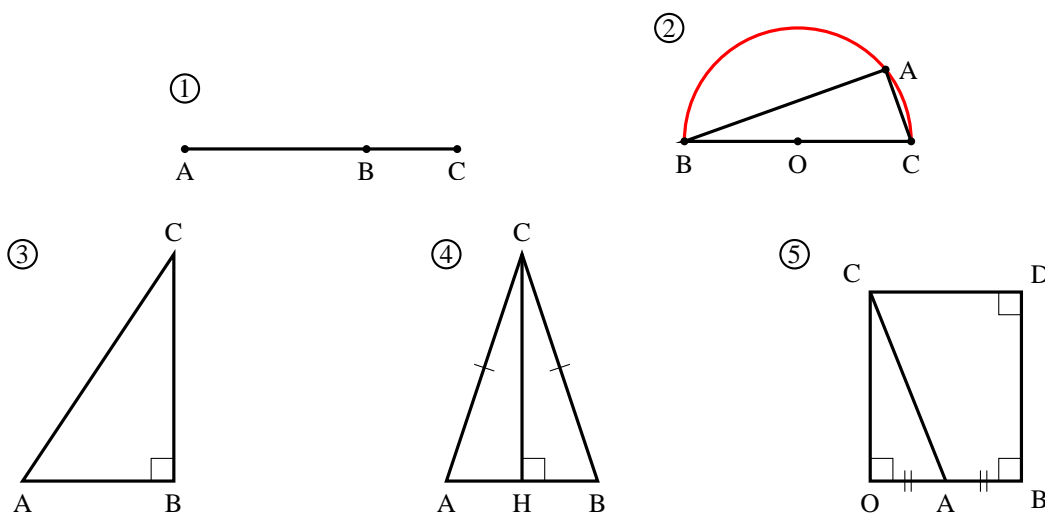
a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$

d) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}AB^2$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB^2$

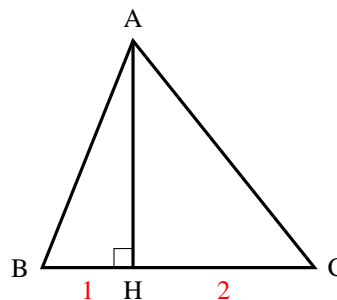
e) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$



EXERCICE 6

Quel théorème permet d'affirmer :

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 3 \quad \text{et} \quad \vec{CA} \cdot \vec{BC} = -6$$



EXERCICE 7

On donne trois points $A(4 ; 1)$, $B(0 ; 5)$ et $C(-2 ; -1)$.

1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2) En déduire que $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de \widehat{BAC} .

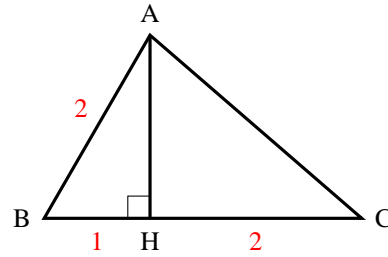
Propriétés**EXERCICE 8**

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB}$

b) $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

c) $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$

**Orthogonalité****EXERCICE 9**

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de m et déterminer le réel m pour que \vec{u} et \vec{v} soient orthogonaux.

a) $\vec{u}(-5 ; 2)$ et $\vec{v}(m ; -2)$

c) $\vec{u}(m - 4 ; 2m + 1)$ et $\vec{v}(2m ; 3 - m)$

b) $\vec{u}(m ; 3 - m)$ et $\vec{v}(2 ; -m)$

EXERCICE 10

On donne $A(-4 ; 1)$, $B(-1 ; 2)$ et $C(1 ; -4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) En déduire la nature du triangle ABC

Distance**EXERCICE 11**

On donne les trois points $A(1 ; 3)$, $B(-1 ; 1)$ et $C(3 ; -2)$.

1) Calculer BC, puis $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a) Pourquoi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$?

b) Pourquoi H est-il un point du segment [BC] ?

c) En déduire BH et HC.

EXERCICE 12

ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4 \quad , \quad AD = 2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD} = 60^\circ$$

1) Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 12$

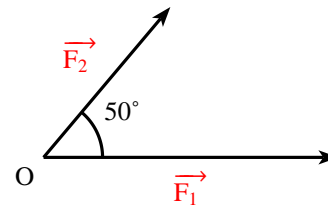
2) En déduire les longueurs AC et BD, et une mesure de l'angle \widehat{BAC}

Application en physique

EXERCICE 13

Intensité de la résultante

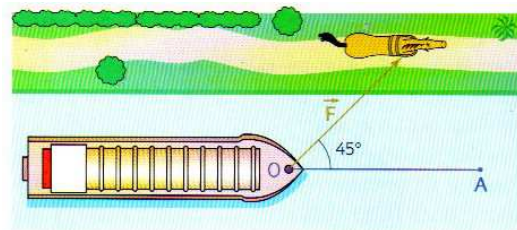
Soit un point O soumis à deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 qui forme un angle de 50 degré. Les intensités des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont respectivement 300 N et 200 N. Par définition, la résultante des force est le vecteur $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.

Travail d'une force

Pour tirer sur 50 m de O en A une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force \vec{F} d'intensité de 2 000 newtons selon une force de 45° avec la direction du déplacement.



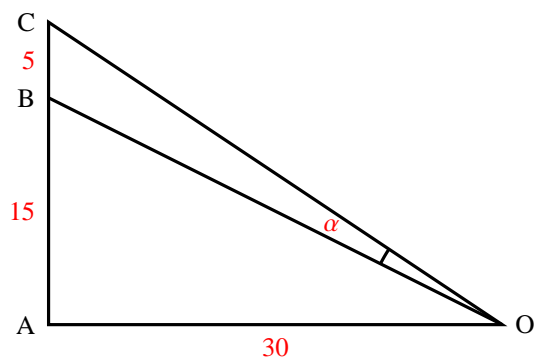
- 1) Quel est le travail W de la force ?
- 2) Si la péniche est tirée par un bateau, suivant l'axe du déplacement, quelle est l'intensité de la force qu'il faut exercer pour obtenir le même travail ?

EXERCICE 14

- 1) A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Démontrer que :

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OA}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

- 2) Dans le cas de la figure ci-contre, calculer l'angle α .



Droites et cercles

EXERCICE 15

d est la droite d'équation : $3x - y + 5 = 0$

- 1) Trouver un vecteur normal à d.
- 2) Trouver une équation de la droite Δ passant par A(1; 2) et perpendiculaire à d.

EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

- a) $d_1 : x - 2y + 4 = 0$ et $d_2 : 6x + 3y - 7 = 0$

- b) $d_1 : y = 2x + 5$ et $d_2 : x - 2y + 1 = 0$
 c) $d_1 : (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$ et $d_2 : (1 - \sqrt{2})x + y = 0$

EXERCICE 17

Trouver l'équation du cercle dans les cas suivants :

- a) de centre $A(1 ; -2)$ et de rayon 5 ;
 b) de centre $A(-1 ; 2)$ et passant par $B(3 ; 4)$
 c) de centre $A(1 ; -4)$ et tangent à l'axe des abscisses

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée est celle d'un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon :

- a) $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$
 b) $(x - 2)(x + 5) + (y - 1)(y - 4) = 0$
 c) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 1 = 0$

EXERCICE 19

Soit les points $I(4 ; -1)$ et $A(1 ; 5)$. \mathcal{C} est le cercle de centre I passant par A.

Démontrer que la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ est tangente en A au cercle \mathcal{C}

EXERCICE 20

On donne le point $A(1 ; 2)$ et la droite d d'équation $x + 2y = 0$.
 Démontrer que le cercle de centre A passant par O est tangent à d .

EXERCICE 21

\mathcal{C} est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ et d la droite d'équation $x + 3y - 6 = 0$

- 1) Faire une figure.
- 2) Vérifier les points $A(3 ; 1)$ et $B(5 ; -1)$ appartiennent à \mathcal{C}
- 3) a) Le droite d est-elle tangente à \mathcal{C} au point A ?
 b) Déterminer l'équation de la droite d' tangente à \mathcal{C} en B.

Relations métriques dans un triangle**EXERCICE 22**

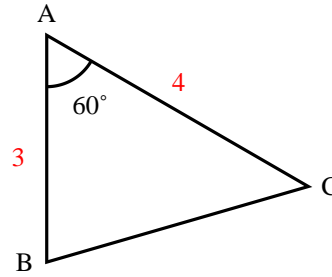
ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

- 1) $AB = 8$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
- 2) $AB = 48$, $AC = 43$ et $BC = 35$.

EXERCICE 23

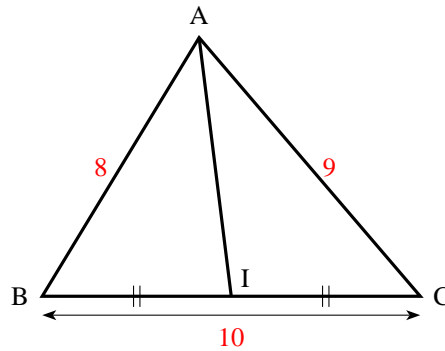
Dans la figure ci-contre, calculer :

- 1) L'aire du triangle ABC.
- 2) Le périmètre du triangle ABC.

**EXERCICE 24**

Dans la figure ci-contre, calculer :

- 1) La longueur de la médiane AI.
- 2) La longueur des deux autres médianes.

**EXERCICE 25**

L'aire d'un triangle ABC est $5\sqrt{3}$, $AB = 4$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$

- 1) Calculer AC
- 2) Démontrer que $BC = \sqrt{21}$

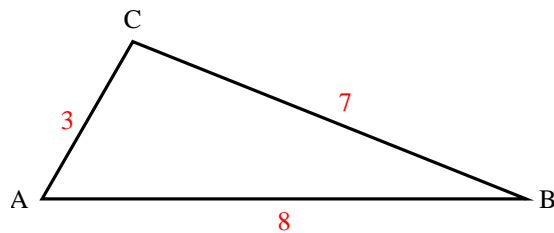
EXERCICE 26

ABC triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12\sqrt{3}$. L'unité est le cm.

- 1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle \widehat{BAC} .
- 2) Trouver en cm^2 , l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 27

- 1) a) En précisant le théorème utilisé, calculer $\cos \widehat{BAC}$
- b) En déduire $\sin \widehat{BAC}$
- 2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?

**EXERCICE 28**

ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 7$ $AD = 3$ $AC = 8$

- 1) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$
- b) En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, trouver $\cos \widehat{BAD}$.
En déduire que : $\sin \widehat{BAD} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$
- 2) a) Calculer l'aire du triangle BAD.
- b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD.

Trigonométrie**EXERCICE 29**

- 1) Vérifier que : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$
- 2) Vérifier que : $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 30

Calculer $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

- a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cos x = \frac{3}{5}$ c) $\sin x = -\frac{1}{3}$

EXERCICE 31

Réduire les expressions suivantes :

- a) $A(x) = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$
 b) $B(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
 c) $C(x) = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$

EXERCICE 32

Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

- a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ c) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 33

x est un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

- a) Réduire l'écriture de l'expression : $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$
- b) En déduire que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

EXERCICE 34

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \frac{3}{5}$ et $\sin b = \frac{1}{2}$

- 1) Calculer $\sin a$ et $\cos b$.
- 2) En déduire $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.

EXERCICE 35

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin a = \frac{1}{2}$ et $\cos b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

- 1) Calculer $\cos a$ et vérifier que $\sin b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
- 2) a) Calculer $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.
b) En déduire $(a + b)$ puis b .

EXERCICE 36

a est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

- 1) Calculer $\cos 2a$
- 2) a) A quel intervalle appartient $2a$
b) En déduire a , en justifiant votre réponse.

EXERCICE 37

a est un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

- 1) a) Démontrer que : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$
b) En déduire que : $\frac{1 + \sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
- 2) Sans calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$, déduire de la question précédente que :

$$\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

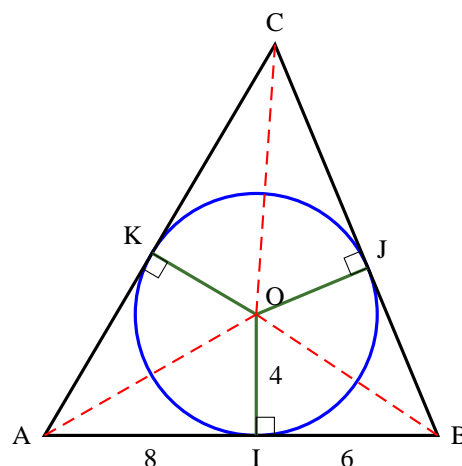
EXERCICE 38

Triangle et cercle inscrit

Comme l'indique la figure ci-contre, ABC est un triangle, le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 4 est le cercle inscrit tangent en I à (AB).

On a $IA = 8$ et $IB = 6$.

- 1) a) Calculer : $\sin \widehat{A}$ et $\cos \widehat{A}$
b) Déduire que :
 $\sin \widehat{A} = \frac{4}{5}$ et $\cos \widehat{A} = \frac{3}{5}$.



- 2) De même, calculer $\sin \widehat{B}$ et $\cos \widehat{B}$.
- 3) a) Démontrer que : $\cos \widehat{C} = -\cos(\widehat{A} + \widehat{B})$ et $\sin \widehat{C} = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$
b) En déduire $\cos \widehat{C}$ et $\sin \widehat{C}$