

PROF: ATMANI NAJIB

## Série produit scalaire dans le plan

### Exercice n°1 :

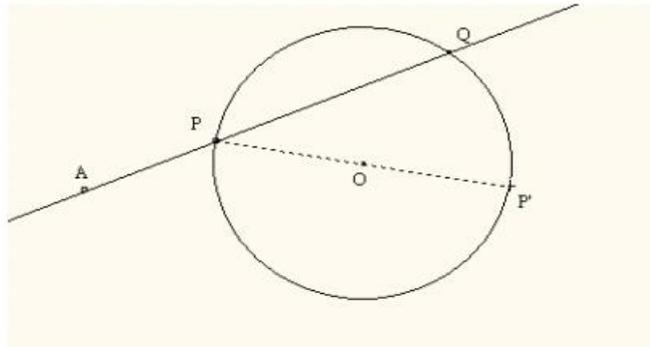
$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 5 cm.  $I$  est le milieu de  $[BC]$ . Calculer les produits scalaires suivants :  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$  ;  $\overline{CA} \cdot \overline{CI}$  ;  $(\overline{AB} - \overline{AC}) \cdot \overline{AI}$ .

### Exercice n°2 :

$ABC$  est un triangle dans le quel  $AB = 2$  et  $AC = 3$ . De plus  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4$ .  
Ce triangle est il rectangle ? (si oui préciser en quel sommet).

### Exercice n°3 :

$C$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  et  $A$  est un point fixé du plan.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite  $(d)$  passant par  $A$ , coupant le cercle  $C$  en deux points  $P$  et  $Q$ , le produit scalaire  $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$  est constant.

1. Soit  $P'$  le point diamétralement opposé à  $P$ . Montrer que  $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}$ .
2. Montrer que  $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = AO^2 - R^2$ .
3. Conclure.

### Exercice n°4 :

$ABCD$  est un parallélogramme tel que  $AB = 4$ ,  $AD = 5$  et  $AC = 7$ .

1. Calculer  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ .
2. Calculer en développant  $\|\overline{AD} - \overline{AB}\|^2$ .
3. En déduire  $BD$

### Exercice n°5 :

$ABCD$  est un rectangle de longueur  $L$  et largeur  $\ell$ . Soient  $H$  et  $K$  les projetés orthogonaux des sommets  $B$  et  $D$  sur la diagonale  $(AC)$ .

1. Montrer que  $\overline{CA} \cdot \overline{BD} = L^2 - \ell^2$  (on pourra décomposer les vecteurs suivant des directions orthogonales). En déduire  $HK$  en fonction de  $L$  et  $\ell$ .
2. Comment choisir  $L$  et  $\ell$  pour avoir  $AC = 2HK$ .

**Exercice n°6 :**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne  $A(-2; 2)$  et  $B(2; 2)$ .

1. Calculer les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$ .
2. Démontrer que, pour tout point  $M$  du plan, on a :  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
3. Démontrer que l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan tels que :  $MA^2 + MB^2 = 40$  est un cercle  $(C)$  de centre  $I$  et de rayon  $r = 4$ .
4. Déterminer une équation du cercle  $(C)$ .
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses.
6. Soit  $\lambda$  un réel négatif. Comment choisir  $\lambda$  pour que le point  $Z(\sqrt{7}, \lambda)$  soit sur  $(C)$  ?
7. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en  $Z$ .

**Exercice n°7 :**

L'unité de longueur est le centimètre.

O et A sont deux points tels que  $OA = 2$ .

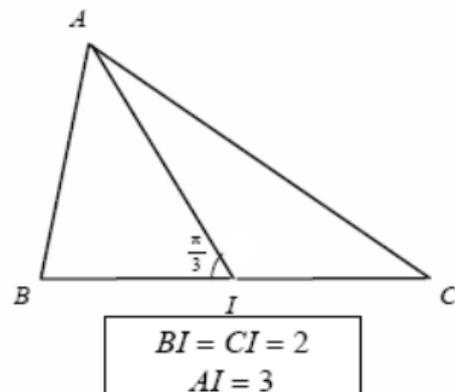
- 1) Déterminer et placer sur une figure le point H de la droite  $(OA)$  tel que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = 10$
- 2) Déterminer et représenter sur la figure précédente l'ensemble E des points M du plan tels que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 10$ .  
(E est la ligne de niveau 10 de la fonction  $M \rightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ , avec  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ )

**Exercice n°8 :**

ABC est un triangle et I est le milieu de  $[BC]$ .  
(voir les données sous la figure)

Calculer :

1.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2.  $AB^2 + AC^2$
3.  $AB^2 - AC^2$
4.  $AB$  et  $AC$ .



**Exercice n°9 :**

Dans un plan  $P$  on donne un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 2BC = 4$ .

On note  $O = A * B$ .  $J \in [CD]$  tel que  $CJ = 1$  et  $I$  le point d'intersection des deux droites  $(AC)$  et  $(BJ)$ .

- 1- a) Calculer  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CJ}$ . En déduire que  $(AC) \perp (BJ)$ .  
b) Calculer  $BJ$  puis la distance du point B à la droite  $(AC)$ .
- 2- Soit  $F = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 24\}$ . Déterminer et construire l'ensemble  $F$ .
- 3- On note  $H$  le point du plan défini par  $BH = 2\sqrt{3}$  et  $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{6}$  et  $E$  le point tel que  $\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HE} = \vec{0}$ .  
b) Calculer  $AH$  et en déduire la nature du triangle  $ABH$ .  
c) Soit  $F' = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + 2ME^2 = 30\}$ . Vérifier que  $A \in F'$  puis déterminer et construire l'ensemble  $F'$ .

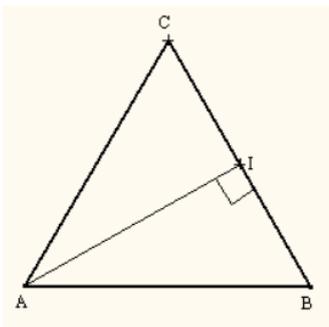
### Exercice n°10 :

ABC est un triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 4$  et  $BC = 2\sqrt{19}$ .

1. a) Démontrer que  $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$  rd. Construire le triangle ABC.
- b) Calculer la distance CI où  $I = A * B$ .
2. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :
  - a)  $E = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 92\}$ .
  - b)  $F = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = -60\}$ , ( vérifier que  $C \in F$  ).
  - c)  $\Gamma = \{M \in P / MB^2 - 4MA^2 = 12\}$ .

### Solutions des exercices

#### Solutions de l'exercice1 :



$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = BA \times BC \times \cos \hat{ABC} = 5 \times 5 \times \cos 60^\circ = \frac{25}{2}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CI} = CA \times CI \times \cos \hat{ACI} = 5 \times \frac{5}{2} \times \cos 60^\circ = \frac{25}{4}$$

$$(\overline{AB} - \overline{AC}) \cdot \overline{AI} = (\overline{AB} + \overline{CA}) \cdot \overline{AI} = \overline{CB} \cdot \overline{AI} = 0$$

#### Exercice n°2 :

$AB = 2$  et  $AC = 3$  et  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4$ .

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BA} \cdot (\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{BA} \cdot \overline{BA} + \overline{BA} \cdot \overline{AC} = BA^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$  ABC est un triangle rectangle en B.

#### Autrement :

$$BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC} = BA^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 + 9 - 8 = 5$$

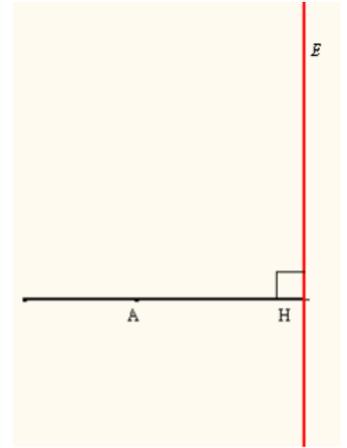
$BC^2 + BA^2 = AC^2 \Rightarrow$  BAC est un triangle rectangle en B.

**Exercice n°3 :**

- $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ , car Q est le projeté orthogonal de P' sur la droite (AP).
- $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = (\overline{AO} + \overline{OP}) \cdot (\overline{AO} + \overline{OP'}) = AO^2 + \overline{AO} \cdot \underbrace{(\overline{OP} + \overline{OP'})}_0 + \overline{OP} \cdot \underbrace{\overline{OP'}}_{-\overline{OP}} = AO^2 - OP^2 = AO^2 - R^2$
- $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'} = AO^2 - R^2$  c'est une constante puisque A est fixe.

**Exercice n°7 :**

- H ∈ (OA) tel que :  $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = 10$   
 $H \in (OA) \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overline{OA} \text{ et } \overline{OH} \text{ sont de même sens} \\ \text{ou} \\ -OA \times OH \text{ si } \overline{OA} \text{ et } \overline{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$   
 $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = 10 > 0 \Rightarrow \overline{OA} \text{ et } \overline{OH} \text{ sont de même sens et } OA \times OH = 10 \Rightarrow OH = 5$
- $\overline{OA} \cdot \overline{OM} = 10 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OM} = \overline{OA} \cdot \overline{OH} \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \left( \underbrace{\overline{OM} - \overline{OH}}_{\overline{HM}} \right) = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{HM} = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \perp \overline{HM}$   
 E est la droite perpendiculaire à (OA) en H.



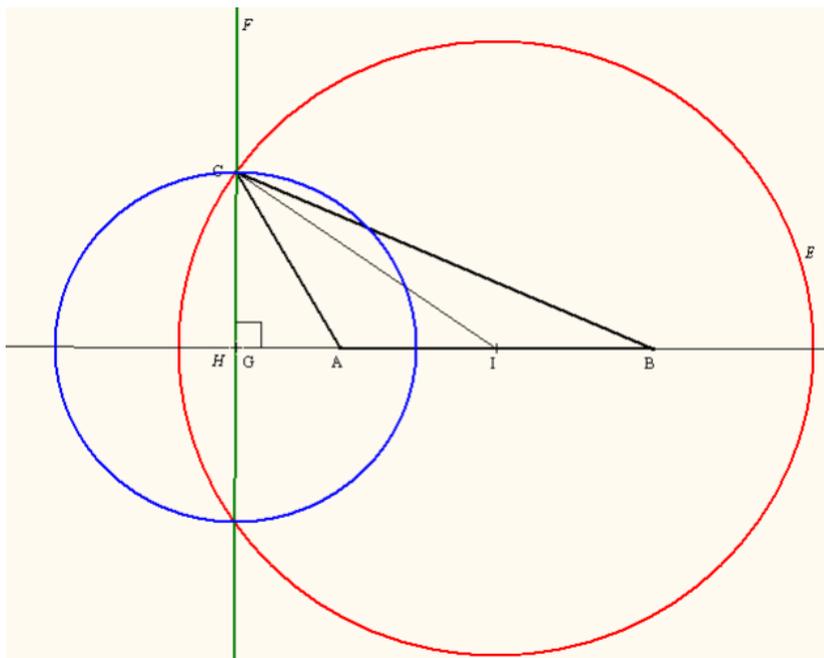
**Exercice n°10 :**

AB = 6, AC = 4 et  $BC = 2\sqrt{19}$ .

1. a) D'après la formule d'El Kashy, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{BAC} \Rightarrow \cos \hat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{36 + 16 - 76}{48} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \text{ rd}$$



b) D'après la formule de la médiane, on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow CI^2 = \frac{CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}}{2} = \frac{16 + 76 - 18}{2} = 37 \Rightarrow CI = \sqrt{37}$$

2. a)  $E = \{M \in P \mid MA^2 + MB^2 = 92\}$

$$M \in E \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 92 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 92 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{92 - 18}{2} = 37 \Leftrightarrow IM = \sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta(I, \sqrt{37})$$

Ainsi E est le cercle de centre I et de rayon  $\sqrt{37}$  (puisque  $IC = \sqrt{37} \Rightarrow C \in E$ ).

b)  $F = \{M \in P \mid MA^2 - MB^2 = -60\}$

$$CA^2 - CB^2 = -60 \Rightarrow C \in F.$$

$$M \in F \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = -60 \Leftrightarrow 2\overline{IM} \cdot \overline{AB} = -60 \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = -30$$

Soit H le point de la droite (AB) tel que  $\overline{IH} \cdot \overline{AB} = -30$

F est la droite perpendiculaire à (AB) en H, ou F est la perpendiculaire à (AB) passant par C.

c)  $\Gamma = \{M \in P \mid MB^2 - 4MA^2 = 12\}$

Soit G le barycentre des points pondérés (B, 1) et (A, -4)

$$\overline{GB} - 4\overline{GA} = \vec{0}$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MB^2 - 4MA^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MG} + \overline{GB})^2 - 4(\overline{MG} + \overline{GA})^2 = 12 \Leftrightarrow -3MG^2 + 2\overline{MG} \cdot \underbrace{(\overline{GB} - 4\overline{GA})}_{\vec{0}} + GB^2 - 4GA^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow -3MG^2 + GB^2 - 4GA^2 = 12$$

$$\text{Or } \overline{BG} = \frac{4}{3}\overline{BA} \Rightarrow BG = \frac{4}{3} \times 6 = 8 \text{ et } \overline{AG} = -\frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow AG = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow -3MG^2 + 64 - 16 = 12 \Leftrightarrow 3MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 12 \Leftrightarrow GM = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta(G, 2\sqrt{3})$$

Remarque :  $C \in \Gamma$  car  $CB^2 - 4CA^2 = 12 \Rightarrow \Gamma$  est le cercle de centre G et passant par C