

Cours PRODUIT SCALAIRE

PROF : ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions : Soit $B(\vec{i}; \vec{j})$ une base de V_2 .

- 1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
- 2) La base B est dite **normée** si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- 3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.
- 4) Soit O un point du plan

Soit $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan (\mathcal{P})

On dit que le repère \mathcal{R} est orthonormé si la base $B(\vec{i}; \vec{j})$ associé à \mathcal{R} est orthonormée.

On pose : $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $B(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée de V_2 .

Soient : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$ car $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ puisque : $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i}; \vec{j})$

Soient : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a :

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- 2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 3) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors

$$AB = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice : dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les

points $A(1; -3)$ et $B(3; 7)$ et $C(-3; 1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 : $\overline{BC}(-6; -6)$ et $\overline{AC}(-4; 4)$ et $\overline{AB}(2; 10)$

$$AB = \|\overline{AB}\| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Puisque : $AC^2 + BC^2 = 32 + 72 = 104$ et $AB^2 = 104$

Donc : $AC^2 + BC^2 = AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\overline{BC}(-6; -6)$ et $\overline{AC}(-4; 4)$

Donc : $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 24 - 24 + 0$ Donc : $\overline{AC} \perp \overline{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2) puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$$

Exercice :

Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Considérons la droite (D): $2x - y + 1 = 0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α .

- 1- Déterminer les coordonnées de N .
- 2- Déterminer la distance ON .
- 3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.



III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de cos :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soient : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}) = xx' + yy'$

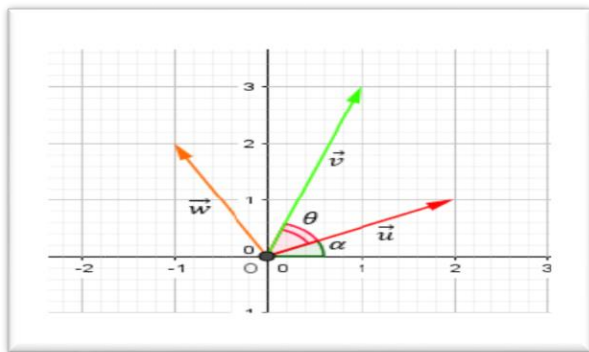
$$\text{Par suite : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée

$$B(\vec{i}; \vec{j})$$



$\vec{u}(x; y)$ et α la mesure de l'angle polaire $(\vec{i}; \vec{u})$

Puisque $\vec{i}(1;0)$ alors : $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$ et puisque $\vec{j}(0;1)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = y \text{ D'autre part: } \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{i}\| \cos(\vec{u}; \vec{i}) = \|\vec{u}\| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{j}\| \cos(\vec{u}; \vec{j}) = \|\vec{u}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \sin \alpha$$

$$\text{On peut conclure que : } \begin{cases} x = \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ y = \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{cases}$$

Et par suite: $\vec{u} = \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{j} = \|\vec{u}\| (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur \vec{u} .

2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x; y)$ et α la mesure de l'angle polaire $(\vec{i}; \vec{u})$

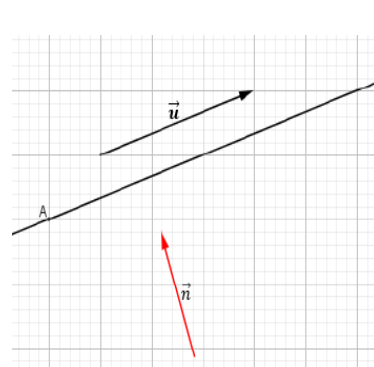
et \vec{w} le vecteur tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$ et $(\vec{u}; \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur \vec{w}

$$\text{on a : } \vec{w} = \|\vec{w}\| \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \|\vec{w}\| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$$

$$\vec{w} = -\|\vec{w}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{w}\| \cos \alpha \vec{j} = -\|\vec{u}\| \sin \alpha \vec{i} + \|\vec{u}\| \cos \alpha \vec{j}$$

$$(\text{car : } \|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|) \quad \vec{w} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$



Par suite $\vec{w}(-y; x)$

D'où on peut conclure que :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -x'y + xy'$$

et on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta$$

où : $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \theta [2\pi]$ Ce qui nous permet de confirmer

$$\text{que : } \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = -x'y + xy'$$

$$\text{et donc : } \sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Théorème : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i}; \vec{j})$ Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Exercice: dans Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

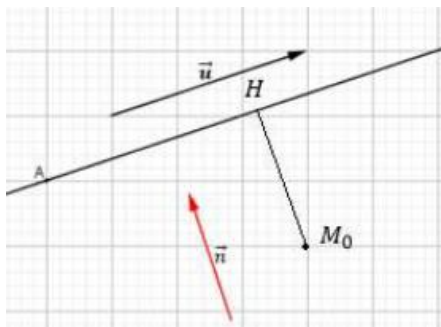
$A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$



Solution : 1)



$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et}$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 1 + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ et } AC = \sqrt{10}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{0}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = 0$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-10}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -1$$

2) on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $AB = AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-\pi}{2} [2\pi] \text{ car : } \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{4} [2\pi] \text{ et}$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -1$$

$$\text{Donc : } \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\right) [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi] = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Définition : Soit $D(A; \vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} ; tout vecteur \vec{n} non nul et orthogonal à \vec{u} s'appelle un vecteur normal sur la droite (D).

Remarque :

Si \vec{n} est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec \vec{n} est aussi

Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est non nul et orthogonal à \vec{u} donc normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A(x_A; y_A)$ un point donné, et $\vec{v}(a; b)$ un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet \vec{v} comme vecteur normal.

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ \Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ un point donné, et

$\vec{n}(a; b)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet \vec{n} comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

$$(D): a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Exercice : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0) + 1(y-1) = 0$

$$\text{donc : } (D) : 2x + y - 1 = 0$$

Exercice : donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1) (D): $x - 2y + 5 = 0$

$$2) (D) : 2y - 3 = 0 \quad 3) (D) : x - 1 = 0$$

Solution : un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$

Est $\vec{n}(a; b)$

$$1) (D) : x - 2y + 5 = 0 : \vec{n}(1; -2) \text{ un vecteur normal}$$

$$2) (D) : 0x + 2y - 3 = 0 : \vec{n}(0; 2) \text{ un vecteur normal}$$

$$2) (D) : 1x + 0y - 1 = 0 : \vec{n}(1; 0) \text{ un vecteur normal}$$

Exercice : dans Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les

points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1) déterminer une équation cartésienne



de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB)
passant par C

2) déterminer une équation cartésienne
de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB)
passant par C

Solution : 1) soit M un point du plan (\mathcal{P})
 $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) - (y-5) = 0$
 $\Leftrightarrow 6x - y - 1 = 0$

Donc : $(D) : 6x - y - 1 = 0$

1) soit $M(x; y)$ un point du plan (\mathcal{P})

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$

Avec \vec{n} un vecteur normal à la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6, -1)$ est un vecteur directeur de
la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1, 6)$

On a donc : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-1) + 6(y-5) = 0$
 $\Leftrightarrow x + 6y - 31 = 0$ Donc : $(\Delta) : x + 6y - 31 = 0$

Exercice : dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un
repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les
points $A(1; 2)$ et $B(-2; 3)$ et $C(0; 4)$

1) déterminer une équation cartésienne
de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$
2) déterminer une équation cartésienne de la droite
 (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $(D) : ax + by + c = 0$

Avec $\overrightarrow{AB}(a, b)$ un vecteur normal à (D)

$\overrightarrow{AB}(-3, 1)$ donc : $(D) : -3x + y + c = 0$

Or $I \in (D)$ I est le milieu du segment $[AB]$

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$

Par suite : $(D) : -3x + y - 4 = 0$

2) (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2, 1)$ un vecteur normal à (Δ) donc

$(\Delta) : 2x + y + c = 0$ et on a $A \in (\Delta)$ donc

$$2 \times 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$$(\Delta) : 2x + y - 4 = 0$$

Exercice : Considérons le triangle ABC où $A(2, 1)$ $B(5, 0)$ et $C(7, 6)$

1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .

b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre
du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées du point G centre de
gravité de ABC .

3) Déterminer les coordonnées du point H ,
orthocentre du triangle ABC .

4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

3) droites perpendiculaires

proposition : Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère
orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

on considère les deux droites : $(D) : ax + by + c = 0$

et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Avec \vec{n} le vecteur normal de (D) et \vec{n}' le vecteur
normal de (D')

Exercice : $(D) : 2x + 3y - 1 = 0$ et $(D') : \frac{3}{2}x - y + 4 = 0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Solution :

$\vec{n}(2; 3)$ est un vecteur normal de (D)

$\vec{n}'\left(\frac{3}{2}; -1\right)$ est un vecteur normal de (D')

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{n}'$$

donc $(D) \perp (D')$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point
dans le plan. La distance du point M_0 à la droite
 (D) est la distance M_0H où H est la projection

orthogonal de M_0 sur (D) . On la note : $d(M_0; (D))$

Remarque : La distance d'un point M_0 à une droite
 (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M

$$\text{de } (D) \quad d(M_0; (D)) = \min_{M \in (D)} (M_0M)$$



Preuve : Soit la droite $(D): ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0; y_0)$; Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D) , $\vec{n}(a; b)$ est normal sur (D) .

On a pour tout point $A(x_A; y_A)$ de la droite (D) :

$$\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}$$

Donc : $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}$

On conclue que $|\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$ par suite

$$\|\overrightarrow{M_0H}\| \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}| \text{ et finalement : } M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

En passant à l'expression analytique :

$$\vec{n}(a; b) \text{ et } \overrightarrow{M_0A}(x_A - x_0; y_A - y_0)$$

par suite : $M_0H = \frac{|a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$M_0H = \frac{|ax_A - ax_0 + by_A - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$M_0H = \frac{|ax_A + by_A - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Or $A \in (D) \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$

$\Leftrightarrow ax_A + by_A = -c$

D'où $M_0H = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Théorème : Soient la droite $(D): ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0; y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercice : Soient la droite (D) d'équation :

$(D): 3x + 4y + 5 = 0$

- 1) Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)
- 2) calculer La distance du point O à la droite (D)
- 3) Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution : 1) puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D) et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire à (D) on va donc résoudre le

système suivant : $\begin{cases} (D): 3x + 4y + 5 = 0 \\ (\Delta): 4x - 3y = 0 \end{cases}$ On trouve :

$x = \frac{-3}{5}$ et $y = \frac{-4}{5}$ donc $H\left(\frac{-3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$

Autre méthode : Soit $H(x_H; y_H)$ on a

$H \in (D) \Leftrightarrow 3x_H + 4y_H + 5 = 0$

\overrightarrow{OH} est normal à la droite (D) donc colinéaire avec

$\vec{u}(3; 4)$ Donc : $\exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OH} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3k \\ y_H = 4k \end{cases}$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le

système suivant : $\begin{cases} (1) x_H = 3k \\ (2) y_H = 4k \\ (3) 3x_H + 4y_H + 5 = 0 \end{cases}$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$k = \frac{-1}{5}$ Donc : $\begin{cases} x_H = \frac{-3}{5} \\ y_H = \frac{-4}{5} \end{cases}$

2) $d(O; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D) Donc H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{O'H} = -\overrightarrow{OH}$ on pose : $O'(x; y)$

Donc : $\begin{cases} \frac{-3}{5} - x = \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} - y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases}$ Donc : $O'\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$

Exercice : Considérons la parabole d'équation :

$(P): y = x^2$ et la droite $(D): y = x - 1$

- 1- Tracer la droite (D) et la parabole (P) .
- 2- Soit $N\alpha$ un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)
 - a) Déterminer en fonction de α la distance $d(N\alpha, (D))$.
 - b) Pour quelle valeur de α la distance $d(N\alpha, (D))$ est minimale.

V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ



Activité 1: Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls et le trinôme $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

- 1- Développer $f(x)$.
- 2- Déterminer le signe de $f(x)$.
- 3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.
- 4- en déduire que pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Activité 2 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls.

- 1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$
- 2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- 3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

a) Pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

a) Pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

b) l'égalité est vérifiée si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

Propriétés : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i}; \vec{j})$ Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

2) L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Exercice: dans Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les

points $A(1; -1)$ et $B(4; -1)$ et $C(-2; 2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) déterminer une équation cartésienne

de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AB}(3; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 3 = -9$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

2) soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ on a :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et } \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ et } AC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

3) on a : $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$

4) soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(-6, 3)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta) / -6x + 3y + c = 0$ et on a $A(1; -1) \in (\Delta)$ donc

$$-6 \times 1 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$$

$(\Delta) / -6x + 3y + 9 = 0$ donc : $(\Delta) / 2x - y - 3 = 0$

4) soit (D) la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point $M(x, y)$ de la droite (D)

On a : $d(M; (AB)) = d(M; (AC))$

$$\text{D'où } \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel

$$\text{que : } \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \text{ donc : } \sqrt{2}(y+1) = x+y$$



donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$$\begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} (D) \text{ est un demi droite}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

