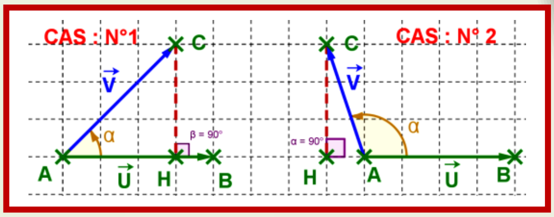
I. RAPPEL :

01. Définition :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ on a : $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Si $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$) alors



- ❖ $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens .
- ❖ $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés.

2. $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\overrightarrow{AB}^2\geq 0$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$ $\overrightarrow{AB}$ ou de AB .

3. Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et on note $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$ (remarque $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$) .

02. Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. La forme trigonométrique du produit scalaire (avec $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$) tel que $\overline{(\vec{u},\vec{v})}=\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\equiv\alpha\ (2\pi)$ est : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\alpha$ ou encore $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\alpha$.

2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.

3. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}\\ \vec{w}.(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{v}\\ (\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}.\vec{v})\end{cases}$.

4. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}^2\geq 0$.

5. produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.

6. orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

03. Base et repère (orthonormé direct)

Définitions :

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P) . le couple $B=(\vec{i},\vec{j})$ s'appelle base du plan . on dit que le plan (P) est rapporté à la base $B=(\vec{i},\vec{j})$ (ou encore le plan (P) est muni à la base $B=(\vec{i},\vec{j})$)
- O est un point de (P) et $B=(\vec{i},\vec{j})$ est une base de (P) le triplet $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ s'appelle repère de (P) .on dit que le plan est rapporté au repère $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ (ou encore le plan est muni d'un repère R)

- $B=(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$. Dans ce cas le repère $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ est appelé repère orthonormé .
- $B=(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée directe si et seulement si $B=(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et $\overline{(\vec{i},\vec{j})}\equiv\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$. Dans ce cas le repère $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ est appelé repère orthonormé direct .

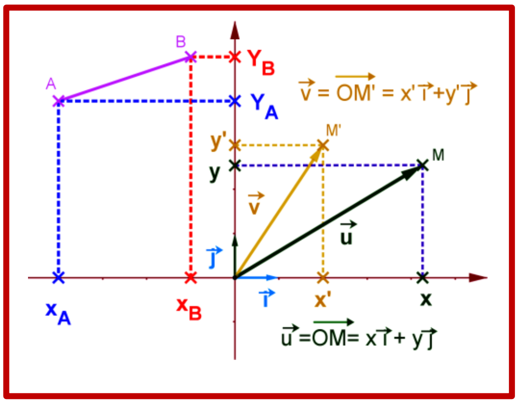
II. L'expression analytique du produit scalaire et la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

Remarque : dans toute la suite du chapitre le plan (P) est rapporté à un repère $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé direct

A. L'expression analytique de : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et AB

01. Activité :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P) .



1. Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x et y et x' et y' puis $\|\vec{u}\|$ $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x et y .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de x et y et x' et y' tel que $\vec{u}\perp\vec{v}$.
3. Calculer la distance AB en fonction des cordonnées de $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.
4. Donner la propriété .

02. Propriété :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P) . on a :

- $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(x,y).(x',y')=xx'+yy'$.
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.
- $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B^2-x_A^2)+(y_B^2-y_A^2)}$ avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

03. Exemple :

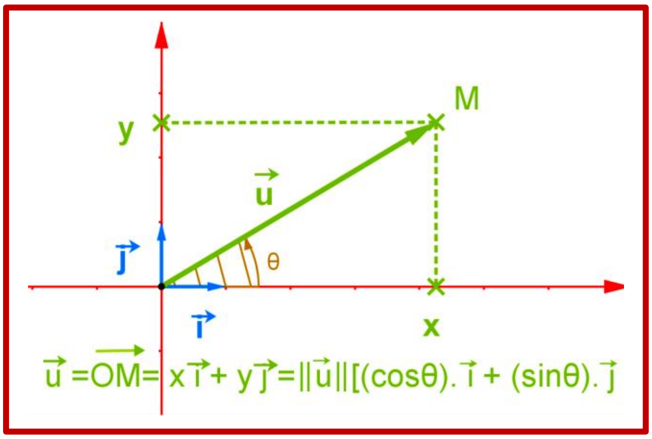
On donne : $\vec{u}(2,-4)$ et $\vec{v}(-1,2)$ et $A(1,0)$ et $B(-1,0)$.

1. Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et AB .
2. Déterminer un vecteur $\vec{w}(x,y)$ unitaire et colinéaire avec $\vec{v}$ (c.à.d. $\|\vec{v}\|=1$) .
3. Montrer que : le triangle ABC est rectangle en A tel que : $A(1,3)$ et $B(3,1)$ et $C(-3,-1)$.
4. Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue du sommet A .

B. Cordonnée d'un vecteur – repérage polaire :

01. Activité :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ est un vecteur de (P) et M est un point de (P) tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\overline{(\vec{i},\vec{u})}\equiv\theta\ [2\pi]$.



1. Montrer que $\overline{(\vec{u},\vec{j})}\equiv\frac{\pi}{2}-\theta\ [2\pi]$.
2. Calculer : $\vec{i}.\vec{u}$ et $\vec{j}.\vec{u}$ de deux façons différentes .
3. On déduit que : $x=\|\vec{u}\|\cos\overline{(\vec{i},\vec{u})}$ et $y=\|\vec{u}\|\sin\overline{(\vec{i},\vec{u})}$.
4. On déduit une autre écriture du vecteur $\vec{u}$.
5. Donner la propriété .

Vocabulaire : l'angle $(\vec{i},\vec{u})$ est appelé angle polaire du vecteur $\vec{u}$ et θ la mesure de l'angle polaire de $\vec{u}$.

02. Propriété :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ est un vecteur non nul de (P) et $\overline{(\vec{i},\vec{u})}\equiv\theta\ [2\pi]$, on a :

- $x=\|\vec{u}\|\cos\overline{(\vec{i},\vec{u})}$ et $y=\|\vec{u}\|\sin\overline{(\vec{i},\vec{u})}$.
- $\vec{u}=\|\vec{u}\|\left(\left(\cos\overline{(\vec{i},\vec{u})}\right).\vec{i}+\sin\overline{(\vec{i},\vec{u})}.\vec{j}\right)$.

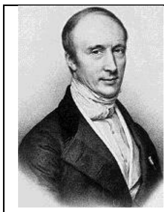
C. l'inégalité de Cauchy – Schwarz - l'inégalité triangulaire :

01. Activité :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de (P) .

1. Montrer que : $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
2. $(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $)\Leftrightarrow|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
3. Montrer que : $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.
4. Donner la propriété .

Laurent Schwartz en 1970. (Mathématicien Français)	
5 mars 1915	
4 juillet 2002 (à 87 ans))	
Médaille Fields (1950)	



Augustin Louis Cauchy en 1840 (Mathématicien Français)	
21 août 1789	
23 mai 1857 (à 67 ans)	
Son nom est sur la liste des soixante-douze noms de savants inscrits sur la tour Eiffel	

Correction :

1. Montrons que : $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

1er cas : $\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{v}=\vec{0}$ donc $\vec{u}.\vec{v}=0$ et $\|\vec{u}\|=0$ et $\|\vec{v}\|=0$ d'où $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

2^{ième} cas : $\vec{u}\ne\vec{0}$ et $\vec{v}\ne\vec{0}$. on a :

$$\left|\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}\right|\le1\Leftrightarrow\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\left|\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}\right|\le1\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow\left|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\overline{(\vec{u},\vec{v})}\right|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

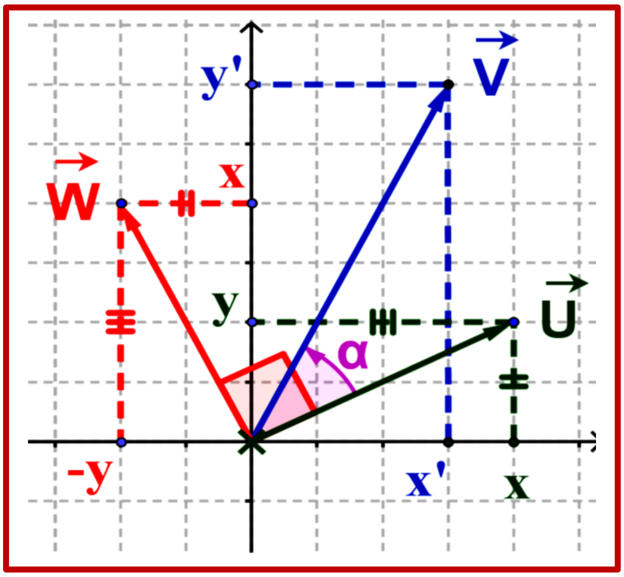
$$\Leftrightarrow|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

D'où : $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$. s'appelle **l'inégalité de Cauchy – Schwarz**

2. Montrons que : $\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left|\vec{u}.\vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$

On pose :

$$(1) : \left|\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)\right| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$$



Donc : $(1) \Leftrightarrow \left|\cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)\right| = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) = 1 \text{ ou } \cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) = -1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) = 2k\pi \text{ ou } \left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ son linaires}\right)$$

Conclusion : $\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left|\vec{u}.\vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.

3. Montrons que : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \le \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$

D'après **l'inégalité de Cauchy – Schwarz on a :**

$$(2) : \left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\times\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le 2\times\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 \le \left(\left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|\right)^2 \quad \left(\vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 \le \left(\left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \le \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\| \quad \text{(les deux nombres } \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\| \text{ et } \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \text{ sont positifs)}$$

Conclusion : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \le \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$. (. s'appelle **l'inégalité triangulaire**) .

02. Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de (P) .

- $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$ (**l'inégalité de Cauchy – Schwarz**).
- $\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left|\vec{u}.\vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.
- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \le \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ (**l'inégalité triangulaire**) .

III. Formules de : $\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$ et $\cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$:

A. Formules de : $\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$ et $\cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$:

01. Activité :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls de (P) . on pose $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha\ (2\pi)$ et le vecteur $\vec{w}(-y;x)$. (voir la figure)

1. Donner : $\cos\overline{(\vec{u};\vec{v})}$ en fonction de x et y et x' et y' .
2. Calculer $\vec{v}.\vec{w}$ et $\det(\vec{u},\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$; quelle remarque peut-on tirer ?
3. Montrer que : $\overline{(\vec{v},\vec{w})}\equiv\frac{\pi}{2}-\alpha\ (2\pi)$ (on peut utiliser $\overline{(\vec{u};\vec{w})}\equiv\overline{(\vec{u};\vec{v})}+\overline{(\vec{v};\vec{w})}:(2\pi)$) .
4. Donner l'expression trigonométrique de $\vec{v}.\vec{w}$ et on déduit que : $\sin\alpha$ (réponse : $\left(\sin\alpha=\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}=\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right)$) .
5. on déduit $\sin\alpha$: en fonction de $\det(\vec{u};\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$; puis en fonction de x et y et x' et y' (réponse $\left(\sin\alpha=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)$) .

02. propriété :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls de (P) avec $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha\ (2\pi)$.

on a : $\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

B. l'aire (ou surface) d'un triangle et d'un parallélogramme :

01. Activité :

Dans le plan (P) on considère un triangle ABC non aplati et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) .

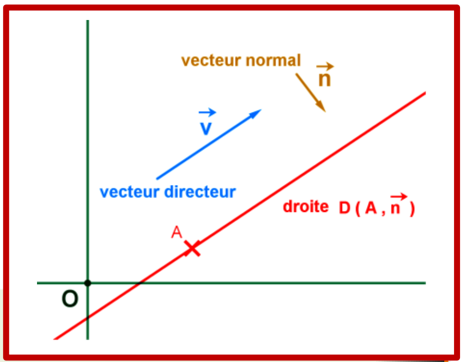
1. Donner la surface S de ABC.
2. Exprimer S en fonction de $\left|\sin\left(\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\right)\right|$.
3. Exprimer S en fonction de $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
4. On déduit la surface du parallélogramme $ABCD$.

02. Propriété :

ABC est un triangle dans le plan (P) .

- La surface S_{ABC} du tringle ABC est : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.
- La surface S_{ABCD} du tringle ABC est : $S_{ABCD}=\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.

IV. La droite dans le plan (étude analytique) :



A. vecteur normal :

01. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P) . Que remarquez-vous ?

02. Définition :

> $D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P) .
> Tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonale au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $D(A,\vec{u})$ s'appelle vecteur normal à la droite $D(A,\vec{u})$.

03. remarque :

- Les vecteurs $\alpha\vec{n}$ (avec $\alpha \neq 0$) sont normaux à la droite $D(A,\vec{u})$.
- $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à la droite $D(A,\vec{u})$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires .
- $\vec{n}(a,b)$ normal à la droite (D) équivaut $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur à la droite (D) .

B. Ensemble des points M tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

01. Activité :

A est un point de (P) et $\vec{n}$ est un vecteur non nul de (P) .

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$.

02. Propriété :

> l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ est la droite $D(A,\vec{n})$ passant par A dont le vecteur normal est $\vec{n}$.

C. Equation cartésienne de la droite $D(A,\vec{n})$:

01. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P) tel que $A(x_A,y_A)$ et $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal de $D(A,\vec{u})$; $M(x,y)$ est un point de (P) .

1. Montrer que : $M(x,y)\in D(A,\vec{n}) \Rightarrow ax+by+c=0$; on détermine c .
2. On étudier la réciproque : E est l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ montrer que l'ensemble E est la droite $D(A,\vec{n})$.

02. Propriété et définition :

> - $M(x,y)$ est un point de (P) appartient à la droite $D(A(x_A,v)\ ;\ \vec{n}(a,b))$ si et seulement si $ax+by+c=0$ et $(a,b)\neq(0,0)$ et $c=-ax_A-by_A$.
> - $ax+by+c=0$ s'appelle l'équation cartésienne de la droite $D(A,\vec{n})$

03. Remarque :

Pour l'équation cartésienne $(D) : ax+by+c=0$ on a :

- $\vec{n}(a,b)$ vecteur normal à la droite (D) .
- $\vec{u}(-b,a)$ vecteur directeur à la droite (D) .

04. Application :

1. Donner l'équation cartésienne de la droite $D\left(A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\vec{n}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)$.
2. On considère le triangle ABC tel que $A(2,1)$ et $B(0,1)$ et $C(-2,3)$.
   - a. Déterminer les équations cartésiennes du la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$.
   - b. Déterminer Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Correction :

1. Equation cartésienne de la droite $D\left(A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\vec{n}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)$. On a :

- $\vec{n}(1,5)$ est un vecteur normal à la droite (D) donc une équation est de le forme $(D):1x+5y+c=0$.
- Le point $A\in(D)$ donc : $A(2,0)\in(D):1\times2+5\times0+c=0$ d'où $c=-2$.

Conclusion : Equation cartésienne est $(D):1x+5y-2=0$.

2. les équations cartésiennes du la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$.
   - a. Equation cartésienne de (D_1) la médiatrice de $[AB]$.

- (D_1) médiatrice de $[AB]$ donc $(AB)\perp(D_1)$ d'où $\overrightarrow{AB}$ est normal à la droite (D_1) .
- $I(1,1)$ est le milieu de $[AB]$ donc (D_1) passe par I .

D'où : $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

Donc : $(D_1):x-1=0$

   - b. Equation cartésienne de (D_1) la médiatrice de $[AC]$.

- (D_2) médiatrice de $[AC]$ donc $(AC)\perp(D_1)$ d'où $\overrightarrow{AC}$ est normal à la droite (D_2) .
- $J(-1,2)$ est le milieu de $[AC]$ donc (D_2) passe par J .

D'où : $M(x;y)\in(D')\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{BC}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow-2(x+1)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow-2x+2y-6=0$$

الأستاذ: بنموسى محمد

Donc : $(D_2): -x+y-3=0$

b. On détermine Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
On sait que l'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Donc : $\Omega(x,y)\in(D)\cap(D') \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -x+y-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

D'où : $\Omega(1,4)$.

Conclusion : $\Omega(1,4)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

D. Orthogonalité de deux droites (D) et (D') :

01. Activité :

1. $D(A,\vec{u})$ et $D'(B,\vec{u'})$ deux droites de (P) dont-on a les vecteurs directeurs .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que $(D')\perp(D)$.

2. $D(A,\vec{n})$ et $D'(B,\vec{n'})$ deux droites de (P) dont-on a les vecteurs normaux .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que $(D')\perp(D)$.

02. Propriété :

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes : $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$ tel que $\vec{n}(a,b)$ et $\vec{n'}(a',b')$ sont les vecteurs normaux respectivement à (D) et (D') . on a : $(D')\perp(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

03. Application :

Déterminer une équation cartésienne d'une droite (D') orthogonale à (D) tel que :

$(D): 2x+y-3=0$.

E. Distance d'un point à une droite (D) .

01. Activité :

Comment on détermine la plus petite distance du point A à la droite (D) ?

02. Définition :

$D(A,\vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D) . la distance AH est appelée la distance de A à (D) et on note $d(A,(D))=d=AH$.

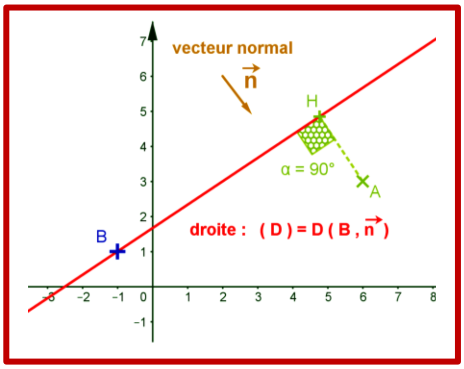
03. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite du plan (P) tel que son équation cartésienne est $(D): ax+by+c=0$ et $A(x_A,y_A)$ est un point de (P) et $H(x_H,y_H)$ sa projection orthogonale sur (D) .

1. Montrer que $c=-ax_H-by_H$ puis $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\left|ax_A+by_A+c\right|$.

2. Montrer que $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\left|ax_A+by_A+c\right|$.

3. On déduit AH en fonction de a et b et x_A et y_A .



04. Propriété :

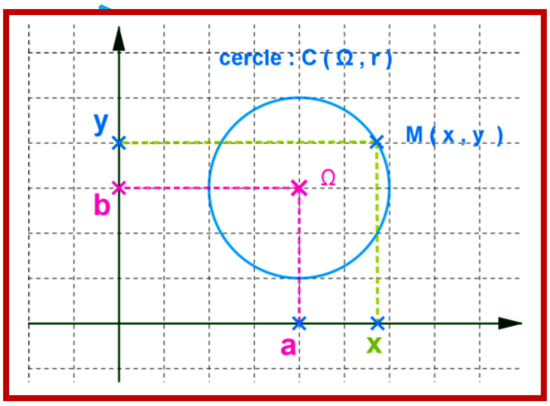
La distance du point $A\left(x_A,y_A\right)$ de (P) à une droite d'équation cartésienne (D) : $ax+by+c=0$ est : $d(A;D)=\dfrac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

05. Exemple :

$(D'):-x+y-3=0$ et $A(2,5)$ on a $d(A;D)=\dfrac{\left|-2+5-3\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=0$ donc $A\in(D)$.

V. Le cercle étude analytique :

A. Equation cartésienne du cercle $C\left(\Omega(a,b);r\right)$.



01. Activité :

$\Omega(a,b)$ est un point de $(\mathcal{P})$ et $r\in\mathbb{R}^{+*}$, $(r>0)$.

1. Compléter l'équivalence suivant on utilise a et b et x et y :

$M(x,y)\in C\left(\Omega(a,b);r\right)\Leftrightarrow\cdots\cdots\cdots$

02. Propriété :

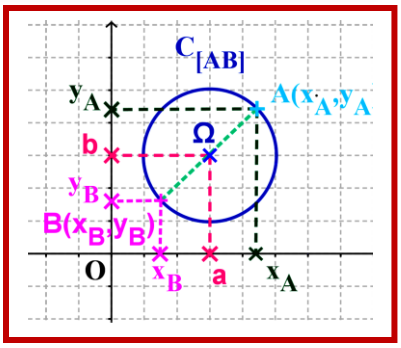
Tout cercle $C\left(\Omega(a,b);r\right)$ du plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ou encore : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ avec $c=a^2+b^2-r^2$.

03. Exemple :

- Donner équation cartésienne du cercle $C\left(\Omega(0,0);1\right)$.
- Donner équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

avec : $A(1;0)$ et $B(-1;0)$.



B. Equation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

01. Activité :

$M(x;y)$ est un point de (P) ; $C_{[AB]}$ est cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\neq B$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x;y)\in C_{[AB]}$

02. Propriété :

Equation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est : $M(x;y)\in C[A;B]\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

03. Exemple :

$A(1;0)$ et $B(-1;0)$ deux points de (P) . trouver équation cartésienne de $C_{[AB]}$.

Correction : On trouve équation cartésienne de $C_{[AB]}$.

On a : $M(x;y)\in C_{[A;B]}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Conclusion : $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

C. Le cercle passant par trois points :

Le cercle passant par trois A et B et C non alignés c'est le cercle circonscrit au triangle ABC tel que son centre Ω est l'intersections des médiatrices et son rayon est $r = \Omega A$.

D. Présentation paramétrique d'un cercle :

01. Activité :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\theta \in \mathbb{R}$; $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M})} \equiv \theta : (2\pi)$.

1. Calculer : $\vec{J}.\overrightarrow{\Omega M}$; $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M}$.
2. Déterminer les cordonnés du point M par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. D'après $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, montrer que : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$.

02. Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\theta \in \mathbb{R}$; $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M})} \equiv \theta : (2\pi)$; pour tout $M(x,y)$ du plan (P) on a : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$.

On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle $C(\Omega(a,b);r)$.

03. Exemple :

Donner présentation paramétrique d'un cercle trigonométrique lié au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ($C(O(0,0);1)$)

E. Etude l'ensemble des points : $\{M(x,y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$. (avec a et b et c de $\mathbb{R}$)

01. Activité :

1. Trouver l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
2. Donner la propriété

02. Propriété :

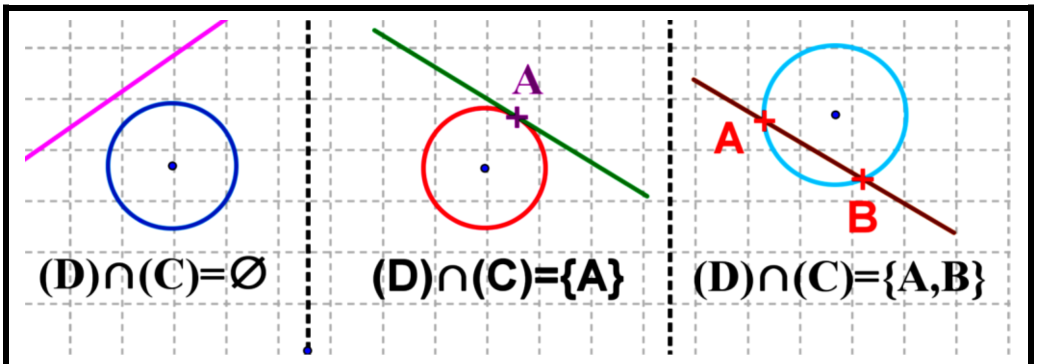
l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est :

- Si $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$ on a : $S = \varnothing$.
- Si $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$ on a : $S = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$ (un point unique qui est $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$)
- Si $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$ on a : $S = (C) = C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) ; r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right)$ (un cercle) .

F. Etude les positions relatives d'un cercle et une droite .

01. Activité :

Tracer les positions relatives d'une droites (D) et un cercle (C) , puis donner les définitions et les propriétés .

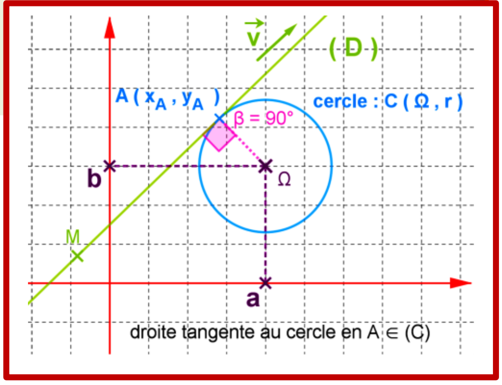


La droite (D) et le cercle (C) sont disjoints	La droite (D) est tangente au cercle (C) en $A\in(C)$	La droite (D) coupe le cercle en 2 points A et B

02. Définitions et propriétés :

(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre Ω et de rayon r .

- (D) est à l'extérieure du cercle (C) ((D) et (C) sont disjoints $(D)\cap(C)=\varnothing$) .
  (D) coupe le l'extérieure du cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D))>r$
- (D) coupe le cercle (C) en deux points A et B ($(D)\cap(C)=\{A,B\}$) .
  (D) coupe le cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D))<r$
- (D) est tangente au cercle (C) ($(D)\cap(C)=\{A\}$) .
  (D) est tangente au cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D))=r$



G. Equation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point A du cercle .

01. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point d' un cercle $C(\Omega,r)$ tel que (D) est tangente à (C) .

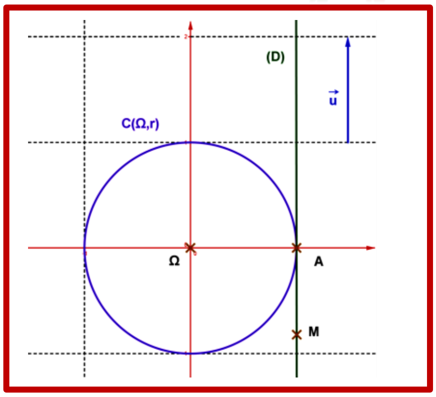
1. Trouver condition nécessaire et suffisante tel que $M(x,y)$ appartienne à (D) .
2. On déduit l'équation cartésienne de $D(A;\vec{u})$; puis donner la propriété .

02. Propriété :

l'équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$ tangente au cercle $C(\Omega,r)$ en un point $A(x_A,y_A)$ de $C(\Omega,r)$ est : $\overrightarrow{\Omega A}.\vec{u}=0$ ou encore $\begin{pmatrix} x_A-a \\ y_A-b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}=0$.

03. Exemple :

Géométriquement donner l'équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$ qui tangente au cercle (C) .



VI. Ensemble des points M du plan (P) tel que :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=k$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$; $MA^2+MB^2=k$;
$MA^2-MB^2=k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

1er cas : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=k$; $\left(\overrightarrow{MA}.\vec{u}=k \text{ et } \vec{u}\neq\vec{0}\right)$.

A et B deux points de (P) tel que : $AB=6$ et I est le milieu de $[AB]$.

1. Déterminer (E_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$.
2. Déterminer (E_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-12$.
3. Déterminer (E_3) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=18$.

2ième cas : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$.

1. Déterminer (F_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.
2. Déterminer (F_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$.
3. Déterminer (F_3) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB}=-9$.
4. Déterminer (F_4) l'ensemble des points M de (P) tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-10$.

3ième cas : $MA^2+MB^2=k$.

1. Déterminer (G_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2+MB^2=68$.
2. Déterminer (G_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2+MB^2=18$.
3. Déterminer (G_3) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2+MB^2=4$.

3ième cas : $MA^2-MB^2=k$.

1. Déterminer (H_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2-MB^2=0$.
2. Déterminer (H_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2-MB^2=36$.

▲ **Remarque :**

On peut étudier les 4 cas précédents dans le cas général c.à.d. $k\in\mathbb{R}$ et AB et on discute avec disjonction des cas .