PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions :

Soit $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}_2$.

- La base β est dite **orthogonale** si $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$
- La base β est dite **normée si** $\|\vec{\imath}\| = \vec{\jmath} = 1$
- Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan $(\mathcal{P})$

- On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}_2$. et $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$; on a :

$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$

$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$

$= xx'\,\vec{\imath}^2 + xy'\ \vec{\imath}.\vec{\jmath} + y\,x'\ \vec{\jmath}.\ \vec{\imath} + yy'\,\vec{\jmath}^2$ d'après la bilinéarité du produit scalaire.

$= xx' + yy'$ $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée

Propriété :

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ on a :

- $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{u} \perp \overrightarrow{u'} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercice :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Considérons la droite (D): $2x - y + 1 = 0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α.

1- Déterminer les coordonnées de N.

2- Déterminer la distance ON.

3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de cos :

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ on a :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

Par suite : $cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et α la mesure da l'angle **polaire** $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$

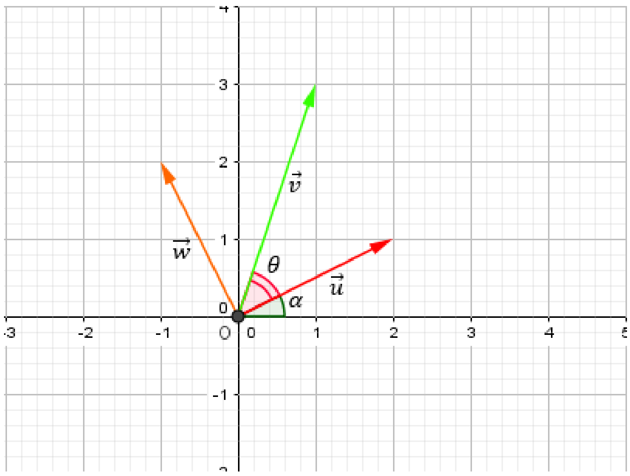
Puisque $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ alors : $\vec{u}.\vec{\imath} = x$ et puisque $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alors

$\vec{u}.\vec{\jmath} = y$

d'autre part : $\vec{u}.\vec{\imath} = \|\vec{u}\|cos\alpha$

$\vec{u}.\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y$

$= \|\vec{u}\|sin\alpha$



On peut conclure que : $\begin{cases} x = \vec{u}.\vec{\imath} = \|\vec{u}\|cos\alpha \\ y = \vec{u}.\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|sin\alpha \end{cases}$

Et par suite : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|cos\alpha\,\vec{\imath} + \|\vec{u}\|sin\alpha\,\vec{\jmath}$

$= \|\vec{u}\|(cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$

Cette écriture s'appelle l'écriture **trigonométrique** du vecteur $\vec{u}$.

2.2 L'expression de sin

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et α la mesure da l'angle polaire $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$ et $\vec{w}$ le vecteur tel que : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$ et $(\overline{\vec{u},\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{w}$ on a :

$\vec{w} = \|\vec{w}\|\ cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\vec{\imath} + \|\vec{w}\|sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\vec{\jmath}$

$= -\|\vec{u}\|\ sin\alpha\,\vec{\imath} + \|\vec{u}\|cos\alpha\,\vec{\jmath}.$ (car : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$)

$= -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

Par suite $\vec{w}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$

D'où on peut conclure que : $\vec{v}.\vec{w} = -x'y + xy'$ et on a : $\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sin\theta$

où : $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \theta\ [2\pi]$

Ce qui nous permet de confirmer que : $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sin\theta = -x'y + xy'$ et donc : $sin\theta = \frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Théorème :

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$; Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

$cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

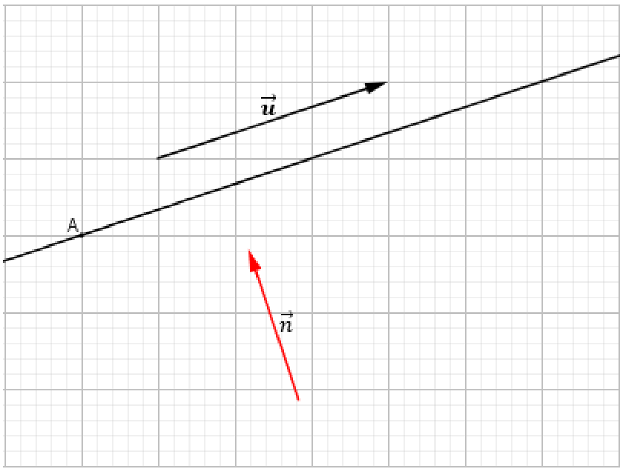
Application : Déterminer la mesure principale de l'angle définie par : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Définition :

Soit $D_{(A,\vec{u})}$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ **non nul et orthogonal à** $\vec{u}$ s'appelle un vecteur **normal sur la droite** (D).



Remarque :

- Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi normal sur la droite (D).
- Si $(D): ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D), l vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ donc normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A(x_A, y_A)$ un point donné, et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

Propriété :

Soient $A(x_A, y_A)$ un point donné, et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :$(D): a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

Exercice :

Considérons le triangle ABC où $(2,1)$, $B(5,0)$ et $C(7,6)$

1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC.

3) Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.

4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

3) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition :

Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D).

On la note : $d(M_0,(D))$

Remarque

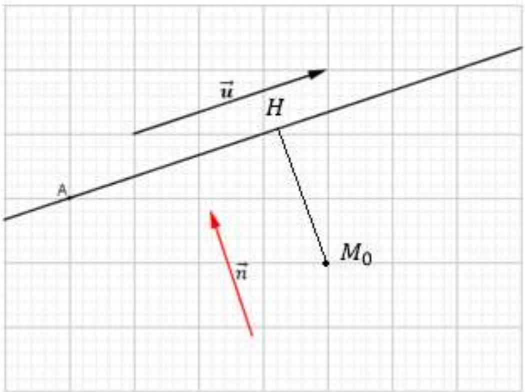
La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D)

$$d\big(M_0,(D)\big) = \min_{M\in(D)} M_0M$$

Preuve :

Soit la droite $(D): ax+by+c=0$ et $M_0(x_0,y_0)$;

Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D), $\vec{n}\binom{a}{b}$ est normal sur (D). On a pour tout point $A(x_A,y_A)$ de la droite (D) :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0A}.\vec{n} &= \big(\overrightarrow{M_0H}+\overrightarrow{HA}\big).\vec{n}\\ &= \overrightarrow{M_0H}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n}\\ &= \overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\end{aligned}$$

On conclue que $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right| = |\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}|$ par suite

$M_0H\times\|\vec{n}\| = |\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}|$

Et finalement : $M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

En passant à l'expression analytique :

$\vec{n}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{M_0A}\binom{x_A-x_0}{y_A-y_0}$ par suite :

$$\begin{aligned}M_0H &= \frac{|a(x_A-x_0)+b(y_A-y_0)|}{\|\vec{n}\|}\\ &= \frac{|ax_A+by_A-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ &= \frac{|-c-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ &= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

$A\in(D)\Leftrightarrow ax_A+by_A=-c$

Théorème :

Soient $(D): ax+by+c=0$ une droite et $M_0(x_0,y_0)$ un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est : $\boldsymbol{d\big(M_0,(D)\big) = M_0H = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Exercice :

Considérons la parabole d'équation : $(P): y=x^2$ et la droite $(D): y=x-1$

1- Tracer la droite (D) et la parabole (P).

2- Soit N_α un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)

a) Déterminer en fonction de α la distance $d\big(N_\alpha,(D)\big)$.

b) Pour quelle valeur de α la distance $d\big(N_\alpha,(D)\big)$ est minimale.

V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Rappelle :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Propriétés :

L'espace vectoriel $\mathcal{V}_2$ est muni d'une base $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormée.

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ on a :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \boldsymbol{xx' + yy'} \leq |\boldsymbol{xx' + yy'}| \leq \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}} \times \sqrt{\boldsymbol{x'^2+y'^2}}$$

- L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{\boldsymbol{(x+x')^2+(y+y')^2}} \leq \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}} + \sqrt{\boldsymbol{x'^2+y'^2}}$$