LE CERCLE

Etude analytique

Dans tout ce qui va suivre le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition :

Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan $(\mathcal{P})$ qui vérifient :$\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$

$$\mathcal{C}_{(\Omega,r)} = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$$

Remarque :

On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a,b)$ un point et r un réel positif,

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}_{(\Omega,r)} &\Leftrightarrow \Omega M = r \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Propriété :

Soient $\Omega(a,b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ à une équation cartésienne de la forme :

$$\mathcal{C}_{(\Omega,r)}: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

2) Equation réduite d'un cercle

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}_{(\Omega,r)} &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{où : } \alpha = -2a \ ; \beta = -2b \text{ et } \gamma = a^2 + b^2 - r^2 \end{aligned}$$

Propriété :

Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α , β et γ sont des réels.

Inversement :

Soient α , β et γ trois réels et $(\Gamma) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ déterminons en fonction des réels α , β et γ la nature de l'ensemble (Γ).

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} \end{aligned}$$

- Si $\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4} < 0$ alors $(\Gamma) = \emptyset$
- Si $\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4} = 0$ alors $(\Gamma) = \left\{\Omega\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2}\right)\right\}$
- Si $\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4} > 0$ alors $(\Gamma) = \mathcal{C}_{(\Omega, \sqrt{\rho})}$ où $\Omega\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-\beta}{2}\right)$ et $\rho = \frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4}$

Exercice 1 :

Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma_1) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma_2) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

Exercice 2 :

Soit l'ensemble :$(\Gamma_m) = \{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$ où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (Γ_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (Γ_m).

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à (Γ_m).

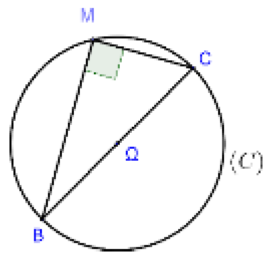
b) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (\Gamma_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (Γ_m).

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)

Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



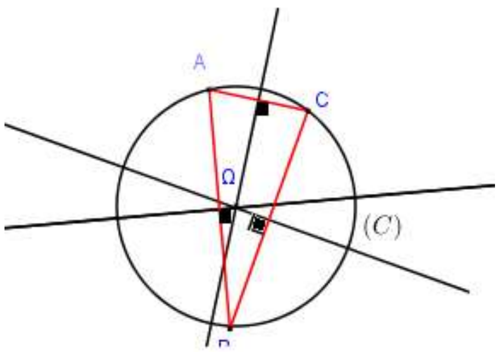
Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Propriété :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :
$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

4) Cercle circonscrit à un triangle.

Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le centre du cercle qui conscrit le triangle ABC



Exercice :

Soient les points $A(-1,0)$, $B(1,2)$ et $C(5,-2)$

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition :

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan.

- L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r, il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$.
- L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$.

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple :

Nous allons résoudre graphiquement le système : $(\Sigma): \begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}<0 \\ x^2+y^2+2x-4>0 \end{cases}$

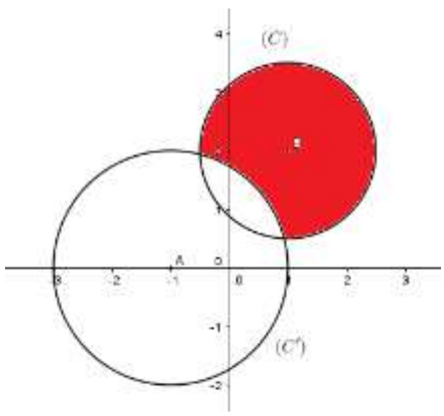
$x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r=\frac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$

de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient est l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ intersection l'intérieur de $(\mathcal{C})$



Exercices :

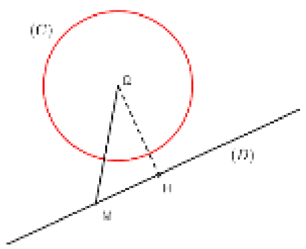
Résoudre graphiquement $(x^2+y^2-4x-6y+9)(2x-y+1)\leq 0$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ de (D), il suffit de déterminer la distance de Ω à (D). soit H la projection orthogonal de Ω sur (D)

$d(\Omega,(D))=\Omega H>r$

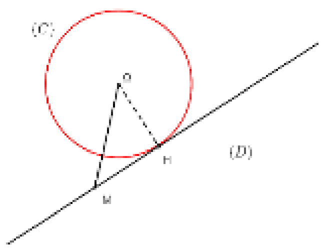


Soit M un point de la droite (D) on a :

$\Omega M \geq \Omega H > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à l'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$$(\mathcal{C})\cap(D)=\emptyset$$

$d(\Omega,(D))=\Omega H=r$



Puisque $\Omega H=r$ alors H est un point commun entre (D) et $(\mathcal{C})$.

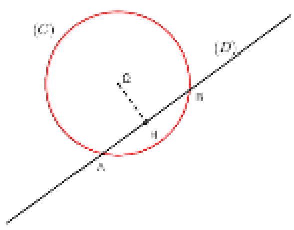
Soit M un point de la droite (D) différent de H on a :

$$\Omega M > \Omega H = r$$

donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à l'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$.

$$(\mathcal{C})\cap(D)=\{H\}$$

$d(\Omega,(D))=\Omega H<r$



Dans ce cas le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) se coupent en deux points A et B et H est le milieu du segment $[AB]$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition :

Une droite (D) est dite tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ s'ils se coupent en un seul point.

Propriété :

Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ si et seulement si $d\big(\Omega,(D)\big) = r$

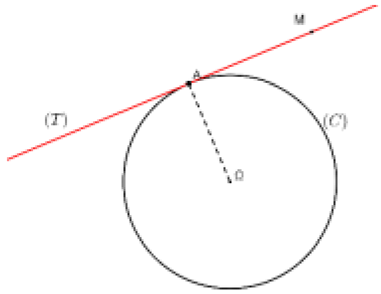
2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan où $\Omega(a,b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ en A

$M(x,y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$



Propriété :

Soient $\Omega(a,b)$ un point et $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ en A à pour équation : $(x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$

Application :

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1- Vérifier que le point $A(3,-1)$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

2.3 Tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ passante par un point à l'extérieure de $(\mathcal{C})$

Exercice :

Soient le cercle $(\mathcal{C})$: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a)Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ) $y = mx + p$

a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

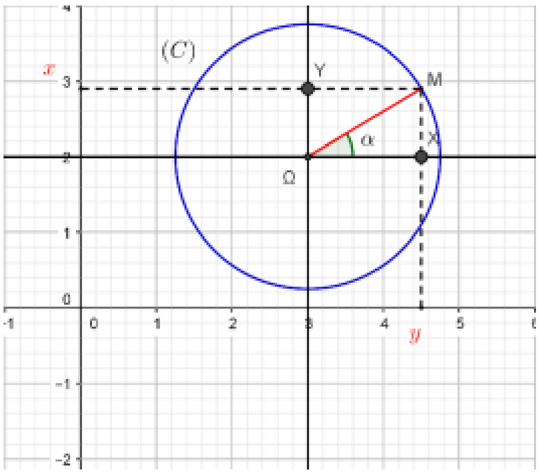
b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ') $y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3.

Déterminer les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.



Considérons $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ (1)

Si $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ et $M(X,Y)_{\mathcal{R}'}$ où : $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$ et $\mathcal{R}'(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Alors (1) se traduit analytiquement par :

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$$

Or : $\begin{cases} X = R.\cos\alpha \\ Y = R.\sin\alpha \end{cases}$

et par suite : $\begin{cases} x = a + R.\cos\alpha \\ y = b + R.\sin\alpha \end{cases}$

Réciproquement l'ensemble $(\Gamma) = \left\{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / \begin{cases} x = a + R.\cos\alpha \\ y = b + R.\sin\alpha \end{cases}\right\}$ où a et b sont des réels et R un réel positif est le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R.