

Le produit scalaire

Exercice 1

Une unité de longueur a été choisie.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation :

$$4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$$

1. a) Démontrer que D est le barycentre du système : (A,3) ; (B,-2) ; (C,3)

b) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

2. Démontrer que $\vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{BB}'$

3. Calculer DA^2 et DB^2

4. Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant la relation : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
Vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E).

Exercice 2

On considère dans le plan un triangle ABC tel que : $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 5$ cm.

Soit I le milieu de [BC].

1. Montrer que $AI = \sqrt{33}$ cm.

2. a) Soit M un point du plan.

Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ est-il égal à un vecteur \vec{u} indépendant du point M ?

Déterminer alors \vec{u} en fonction du vecteur \vec{AI} .

b) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{F} des points M du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

Exercice 3

Écrire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} , sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur \mathcal{P} est le point A(1 ; 5 ; 7).

Exercice 4

Écrire une équation de la sphère de centre I(3 ; 1 ; -4), passant par le point A(4 ; 2 ; 1).

Exercice 5

Vérifier que A(4 ; -1 ; 2) est un point de la sphère \mathcal{S} ; écrire une équation du plan tangent en A à \mathcal{S} .

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 3 = 0.$$

Exercice 6

Calculer la distance d du point A à la droite \mathcal{D} sachant que :

la droite \mathcal{D} a pour équation $-x + 4y - 2 = 0$;

et le point A a pour coordonnées (-1 ; 3).

Exercice 7

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$ et $D(0; -1; 0)$.

1. Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.
2. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?
3. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Calculer $\vec{CI} \cdot \vec{CJ}$. En déduire une mesure en degrés de l'angle \widehat{ICJ} .
4. On appelle H le projeté orthogonal de J sur la droite (CI).
Calculer les coordonnées de H.
Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?

Exercice 8

ABCD est un tétraèdre, tel que $AB = CD = a$. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC] et [BD].

1. Montrer que $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{IJ}$ et que $\vec{AB} - \vec{DC} = 2\vec{KL}$.
2. Montrer que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales.
3. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Calculer la longueur de ses côtés en fonction de a.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré.

Exercice 9

Soit $\vec{u}(\sqrt{2} - 1; 1; \sqrt{2} + 1)$ et $\vec{v}(1; \sqrt{2} + 1; -4 + 2\sqrt{2})$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$; qu'en déduit-on pour \vec{u} et \vec{v} ?

Vérifier ce résultat par un autre calcul.

Exercice 10

Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan.

Démontrer que $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) = 2\vec{DB} \cdot \vec{AC}$ à l'aide de relations de Chasles judicieusement choisies dans le premier membre.

Exercice 11

1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$.

2. *Application* : montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.