

## BARYCENTRES – EXERCICES CORRIGES

### Exercice n°1.

Soit A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, justifier que le point G défini par l'égalité vectorielle donnée est le barycentre d'un système de points pondérés que l'on précisera

1)  $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$       2)  $\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{GB}$       3)  $\overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$

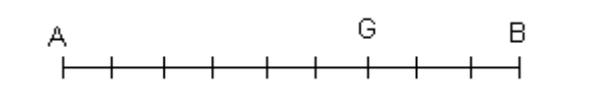
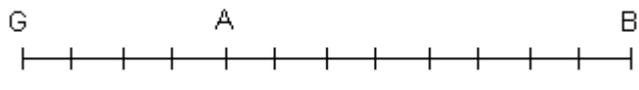
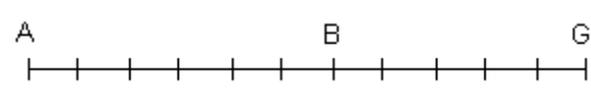
Exercice n°2. Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer

### Exercice n°3.

Soit A et B deux points distincts. Construire, s'ils existent, les barycentres des systèmes de points pondérés suivants.

1)  $\{(A, -2); (B, 5)\}$       2)  $\{(A, -3); (B, 3)\}$       3)  $\left\{ \left( A, \frac{2}{3} \right); \left( B, -\frac{1}{4} \right) \right\}$

Exercice n°4. A partir de chaque figure, déterminer a et b pour que G soit le barycentre du système  $\{(A, a); (B, b)\}$

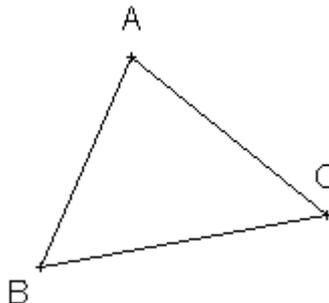
1) 	2) 
3) 	

### Exercice n°5.

Le triangle ABC étant donné ci-dessous, construire **le plus précisément possible** les deux barycentres donnés.

$G = \text{Bar} \{(A, 4); (B, 3); (C, -1)\}$

et  $J = \text{Bar} \left\{ \left( A, \frac{1}{6} \right); \left( B, -\frac{1}{12} \right); \left( C, \frac{1}{4} \right) \right\}$



Exercice n°6. Soit ABC est un triangle.

On définit les points H, K, L et G par :

H est le barycentre du système  $\{(A, 3); (B, 2)\}$

K est le barycentre du système  $\{(B, 2); (C, -1)\}$

L est le barycentre du système  $\{(A, 3); (C, -1)\}$

G est le barycentre du système  $\{(H, 5); (C, -1)\}$

1) Démontrer que :  $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2) En déduire que :

a) G est le milieu du segment [BL]

b) G est le barycentre des points A et K affectés de coefficients que l'on déterminera

### Exercice n°7.

On considère un triangle ABC, I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), J le barycentre des points pondérés (A,1),(B,2), K le barycentre des points pondérés (C,1),(B,-4).

1) Exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer.

2) Déterminez le barycentre de (A,2),(K,3),(C,1).

3) Démontrer que le point J est le milieu de [IK].

4) Soit L le milieu de [CI] et M celui de [KC]. Déterminez a,b,c,d réels pour que L soit le barycentre de (A,a),(C,b) et M celui de (B,c),(C,d).

Exercice n°8.

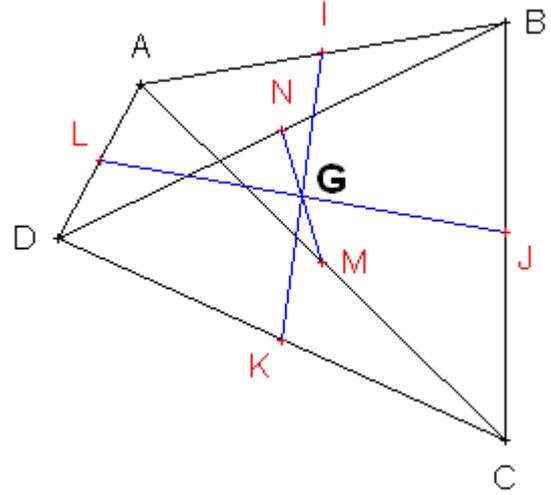
Soit ABCD un quadrilatère.

On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD]

Soit G l'isobarycentre de ABCD.

Démontrer que G est le milieu de [IK], [MN] et [LJ].

Conclure



Exercice n°9.

ABCD est un rectangle tel que  $AB = 6$

1) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points M

du plan tels que  $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|5\vec{MC} - 2\vec{MD}\|$

Démontrer que le milieu de [BC] appartient à  $\Gamma_1$

2) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_2$  des points M du plan tels que  $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2AB$

Démontrer que le point B appartient à  $\Gamma_2$

Exercice n°10.

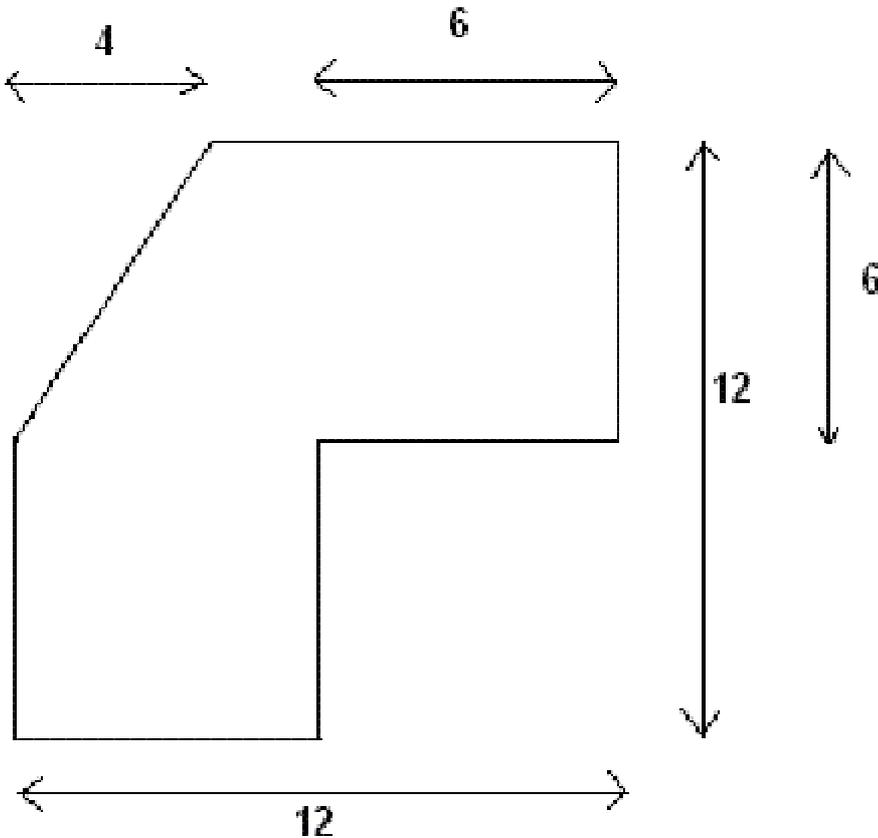
Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-1;2), B(3;1) et C(2;4).

Calculer les coordonnées du barycentre G du système (A;2), (B;-1) et (C;3)

Exercice n°11.

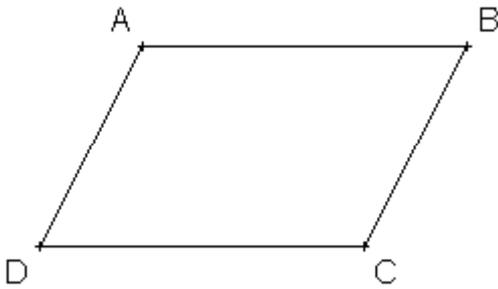
Déterminer et placer le centre d'inertie de la plaque ci-dessous, supposée homogène et d'épaisseur négligeable

On fera apparaître les traits de construction ainsi que les étapes intermédiaires



**Exercices de synthèse :**

Exercice n°12. Soient ABCD un parallélogramme et I le milieu de [AB]. Les droites (DB) et (CI) se coupent en un point noté G (La figure, à compléter, est donnée ci-dessous).



- 1) Montrer que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- 2) a) Construire le barycentre K du système de points pondérés (A ; 1) , (B ; 1) et (C ; -1)
- b) Montrer que K est aussi le barycentre du système de points pondérés (G ; 3) et (C ; -2)
- 3) a) Dédire de la relation (1) que A est le barycentre des points pondérés (D ; 1) , (G ; 3) et (C ; -2)
- b) Montrer que A est le milieu du segment [DK]
- 4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :  

$$\|\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$$
- 5) a) Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $m$  le barycentre  $I_m$  du système (D ,  $m$ ) , (G ; 3) et (C ; -2) existe-t-il ?
- b) Lorsque  $I_m$  existe, montrer que :  $\overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{1+m} \overrightarrow{DK}$
- c) Étudier les variations de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$  et dresser son tableau de variations (on précisera ses limites aux bornes de son domaine de définition sans justification).
- d) En déduire le lieu géométrique du point  $I_m$  lorsque le réel décrit l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice n°13.

Dans le plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH=BC=4, l'unité choisie étant le centimètre.

- 1) Construire, en justifiant, le point G barycentre du système de points pondérés  $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$
- 2) M est un point quelconque de (P). Montrer que le vecteur  $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$  est un vecteur de norme 8
- 3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$
- 4) On considère le système de points pondérés  $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$  où  $n$  est un entier naturel fixé.
- a) Montrer que le barycentre  $G_n$  de ce système, existe quelle que soit la valeur de  $n$
- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  ,  $G_n$  appartient à [AH]
- c) Soit  $\Gamma_n$  l'ensemble des points M du plan tels que  $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{V}\|$ . Montrer que  $\Gamma_n$  est un cercle contenant le point A, dont on précisera le centre et le rayon
- d) Déterminer la distance  $AG_n$  en fonction de  $n$
- 5) Quel est le comportement de  $G_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

Exercice n°14.

Sur une droite  $D$  munie d'un repère  $(O; \vec{i})$ ,  $A_0$  et  $B_0$  sont les points d'abscisses respectives  $-4$  et  $3$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note :  $A_{n+1}$  le barycentre de  $(A_n, 1)$  et  $(B_n, 4)$  ;  $B_{n+1}$  le barycentre de  $(A_n, 3)$  et  $(B_n, 2)$  ;

- 1) Placer les points  $A_0, B_0, A_1, B_1$
- 2) Les points  $A_n$  et  $B_n$  ont pour abscisses respectives  $a_n$  et  $b_n$ . Ainsi  $a_0 = -4$  et  $b_0 = 3$

Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$  et  $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

- 3) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :  $3a_n + 4b_n = 0$

b) En déduire que :  $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$  et  $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) Exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer les limites de  $a_n$  et  $b_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points  $A_n$  et  $B_n$ .