

Les Barycentres

Exercice 1

A et B sont deux points distincts. Construire, s'il existe, le barycentre :

1. G des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
2. H des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).
3. J des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).
4. K des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).
5. L des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Exercice 2

Dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 1)$ et $B(5; 3)$.

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).
2. Déterminer des réels a et b tels que $H(-1; 0)$ soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b).
3. Peut-on trouver a et b tels que O soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b) ?

Exercice 3

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$.

On considère le barycentre G de (A ; 1) et (B ; 3) et le barycentre K de (A ; 3) et (B ; 1).

1. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AK} en fonction de \overrightarrow{AB} . Placer sur un dessin les points A, B, G et K.
2. Montrer que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice 4

Soit QUAD un quadrilatère.

Construire le barycentre G de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1).

Exercice 5

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et G le barycentre des points pondérés (A;1), (B;1) et (C;1).

1. Montrer que G est le barycentre de (C ; 1) et (C' ; 2).
2. En déduire la position de G sur le segment [CC'].
3. Démontrer que G appartient à [BB'] et à [AA']. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

Soit TRUC un quadrilatère.

On désigne par K, L, M, N les milieux respectifs de [TR], [RU], [UC], [CT] et par G l'isobarycentre des quatre points T, R, U et C.

Prouver que G est le milieu de [KM] et de

Que peut-on dire du quadrilatère KLMN ?

Correction

Exercice 1

1. G barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).

Comme $1 + 3 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\vec{GA} + 3\vec{GA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$$

$$4\vec{GA} = -3\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AB}$$

2. H barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).

Comme $2 + 2 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $2\vec{HA} + 2\vec{HB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$2\vec{HA} + 2\vec{HA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$$

$$4\vec{HA} = -2\vec{AB}$$

$$\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

3. J barycentre des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).

Comme $-1 + 2 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $-\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$-\vec{JA} + 2\vec{JA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{JA} = -2\vec{AB}$$

$$\vec{AJ} = 2\vec{AB}$$

4. K barycentre des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).

Comme $-2 - 6 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $-2\vec{KA} + 6\vec{KB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$-2\vec{KA} + 6\vec{KA} + 6\vec{AB} = \vec{0}$$

$$-8\vec{KA} = 6\vec{AB}$$

$$\vec{AK} = \frac{3}{4}\vec{AB}$$

5. L barycentre des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Comme $-2 + 2 = 0$, alors le barycentre n'est pas défini.

Exercice 2

1. Coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).

$$x_G = [(2 \times 1 + 1 \times 5)/3] = [7/3] \quad \text{et}$$

D'où : G a pour coordonnées (7/3 ; 5/3).

2. H est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) si et seulement si $y_G = [(2 \times 1 + 1 \times 3)/3] = [5/3]$

$$x_H = \frac{a \times 1 + b \times 5}{a + b} \quad \text{et} \quad y_H = \frac{a \times 1 + b \times 3}{a + b}$$

$$\text{Or } \vec{H} \text{ a pour coordonnées } (-1 ; \vec{0}), \text{ donc : } \begin{cases} \frac{a \times 1 + b \times 5}{a + b} = -1 \\ \frac{a \times 1 + b \times 3}{a + b} = 0 \end{cases}$$

$$\text{ce qui équivaut à : } \begin{cases} 2a + 6b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes à $a = -3b$.

Une solution du système est donc : $a = -3$ et $b = 1$.

H est donc barycentre de (A ; -3) et (B ; 1).

Remarque :

en fait, H est barycentre de (A ; -3b) et (B ; b) avec $-3b + b \neq 0$ c'est-à-dire $b \neq 0$.

3. O est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) si et seulement si

$$x_O = \frac{a \times 1 + b \times 5}{a + b} \quad \text{et} \quad y_O = \frac{a \times 1 + b \times 3}{a + b}$$

$$\text{Or O a pour coordonnées } (0; 0), \text{ donc : } \begin{cases} \frac{a + 5b}{a + b} = 0 \\ \frac{a + 3b}{a + b} = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a + 5b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$

Ce système admet un unique couple solution (0 ; 0). Comme la somme des coefficients est nulle, alors O ne peut pas être barycentre de (A ; a) et (B ; b).

Exercice 3

1. G étant le barycentre de (A ; 1) et (B ; 3), par définition, on a :

$$\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$$

donc :

$$\vec{GA} + 3\vec{GA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$$

$$4\vec{GA} = -3\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AB}$$

De même, K étant le barycentre de (A ; 3) et (B ; 1), par définition du barycentre, on a :

$$3\vec{KA} + \vec{KB} = \vec{0}$$

donc :

$$3\vec{KA} + \vec{KA} + \vec{AB} = \vec{0}$$

$$4\vec{KA} = -\vec{AB}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB}$$

2. Soit I le milieu du segment [AB]. On va montrer que I est aussi le milieu du segment [GK].

$$\begin{aligned} \vec{IG} + \vec{IK} &= \vec{IA} + \vec{AG} + \vec{IA} + \vec{AK} \\ &= 2\vec{IA} + \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB} \end{aligned}$$

Or, I étant le milieu du segment [AB], $2\vec{IA} = \vec{BA}$. On obtient donc :

$$\vec{IG} + \vec{IK} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{0}$$

I est donc le milieu du segment [GK].

On a donc montré que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice 4

G étant le barycentre de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1), on a :

$$\vec{GQ} + \vec{GU} - 2\vec{GA} - \vec{GD} = \vec{0}$$

$$\vec{GQ} + \vec{GQ} + \vec{QU} - 2\vec{GQ} - 2\vec{QA} - \vec{GD} = \vec{0}$$

$$\vec{DG} = -\vec{QU} + 2\vec{QA}$$

Exercice 5

1. C' est le milieu de [AB], donc C' est le barycentre de (A, 1) (B, 1).

G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (C', 2), (C, 1).

2. On vient de montrer que G est le barycentre de (C', 2), (C, 1), donc :

$$2\vec{GC'} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{CC'}$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

3. A' est le milieu de [BC], donc A' est le barycentre de (B, 1) (C, 1).

G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (A', 2), (A, 1).

On en déduit que G appartient à (A'A) [même au segment [A'A]].

B' est le milieu de [AC], donc B' est le barycentre de (A, 1)(C, 1).

G est le barycentre de (A,1), (B,1), (C,1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (B',2), (B, 1).

On en déduit que G appartient à (B'B) [même au segment [B'B]].

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc concourantes en G.

fait, G est le centre de gravité du triangle ABC.]

Exercice 6

K milieu de [TR], donc K barycentre de (T,1)(R,1)

M milieu de [UC], donc M barycentre de (U,1)(C,1)

G barycentre des points (T,1)(R,1)(U,1)(C,1)

D'après le théorème d'associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de (K,2)(M,2).

G est donc le milieu du segment [KM].

De même :

L milieu de [RU], donc L barycentre de (R,1)(U,1)

N milieu de [TC], donc N barycentre de (T,1)(C,1)

G barycentre des points (T,1)(R,1)(U,1)(C,1)

D'après le théorème d'associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de (L,2)(N,2).

G est donc le milieu du segment

.

Le quadrilatère KLMN a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.