

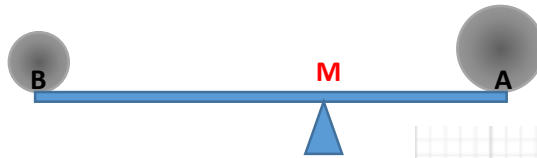
# BARYCENTRE

## I) ACTIVITES

### Activité 1 :

Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur  $1m$  on considère deux boules métalliques de  $500 g$  en  $A$  et de  $350 g$  en  $B$ .  $M$  un point sur la barre.

Déterminer la position de  $M$  sachant que le système est en équilibre.



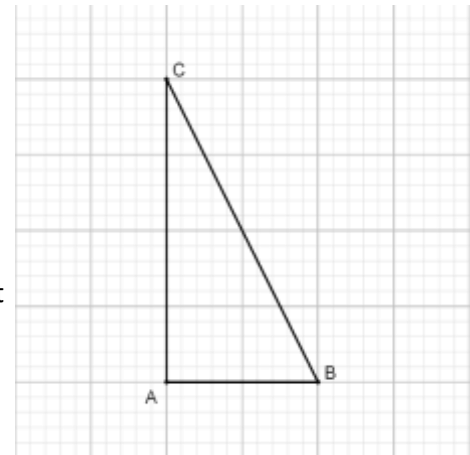
### Activité 2 :

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  et  $AC = 2AB$ .

1- Montrer qu'il existe un et un seul point  $G$  tel que :  $2\vec{AG} - 3\vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point  $G$ .

3- Si le plan est rapporté au repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AI})$  où  $I$  est milieu de  $[AC]$ , quels seront les coordonnées du point  $G$ .



### Activité 3 :

Soit  $(A_i)_{i \leq 4}$  une famille de 4 points, et  $(\alpha_i)_{i \leq 4}$  4 réels dont la somme est non nulle. Montrer que l'application :

$$\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \sum_{i=1}^4 \alpha_i \vec{MA}_i$$

est une bijection. L'application  $\varphi$  s'appelle l'**application de Leibniz**

(Wilhelm Leibniz 1646-1716)

## II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

### 1) Vocabulaires

#### Définitions :

- Soit  $A$  un point et  $\alpha$  un réel non nul ; le couple  $(A, \alpha)$  s'appelle un **point pondéré**.
- Plusieurs points pondérés constituent un **système pondéré**

### 2) Barycentre de deux points pondérés.

#### 2.1 Définitions.

#### Propriété :

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  l'application

est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $\varphi_2(G) = \vec{0}$

$$\varphi_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \alpha \vec{AM} + \beta \vec{BM}$$

**Preuve :**  $\varphi_2$  est l'application de Leibniz pour deux points

**Définition :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  ; le barycentre du système pondéré  $\Sigma$  est le point  $G$  qui vérifie :  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$ .

On écrit :  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

**2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$  et par suite : pour tout réel  $k$  non nul on a :  $k\alpha \overrightarrow{AG} + k\beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

et donc  $G = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ .

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

- Si  $\alpha = \beta$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  s'appelle **l'isobarycentre de A et B** qui n'est que la milieu du segment  $[AB]$ .

• **Construction :**

Construire  $G = Bar\{(A, 3); (B, 2)\}$

- Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc :  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

par suite :  $\alpha \overrightarrow{AO} + \alpha \overrightarrow{OG} + \beta \overrightarrow{BO} + \beta \overrightarrow{OG} = \vec{0}$  où  $O$  est un point quelconque dans le plan ( $\mathcal{P}$ )

d'où :  $(\alpha + \beta) \overrightarrow{OG} + \alpha \overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

on conclut que :  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OB}$ . (car  $\alpha + \beta \neq 0$ )

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ .

Pour tout point  $O$  du plan ( $\mathcal{P}$ ) on a :  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{OB}$ .

Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

**Propriété :**

Si  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Preuve :**

Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant  $A = O$  dans la propriété ; On aura  $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires et par suite : les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

**Propriété :**

Le plan  $(\mathcal{P})$  et rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) x_B \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) y_B \end{cases}$$

**Preuve :** Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre.

**Exercice :**

Considérons les applications  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = 2x$  définies sur  $\mathbb{R}$  soient  $C_f$  et  $C_g$  leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose  $M_x$  le point de  $C_f$  d'affixe  $x$  et  $N_x$  le point d'affixe  $x$  de  $C_g$ .

- 1- Déterminer les coordonnées du point  $G_x$  isobarycentre de  $M_x$  et  $N_x$ .
- 2- Déterminer et tracer l'ensemble dans lequel varie  $G_x$  quand  $x$  varie dans  $\mathbb{R}$ .

**3) Barycentre de trois points pondérés**

**3.1 Définition**

**Propriété :**

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  l'application :  
 $\varphi_3: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$   
 $M \mapsto \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$   
 est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $\varphi_3(G) = \vec{0}$   
 c est à dire :  $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} + \gamma \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

**Preuve :**  $\varphi_3$  est l'application de Leibniz pour trois points

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

On a pour tout point  $O$  du plan  $(\mathcal{P})$ :  $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \overrightarrow{OC}$

**Preuve :** Même démonstration que dans le cas précédent.

**Propriété :**

Le plan  $(\mathcal{P})$  et rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , Soient  $A(x_A, y_A)$  ;  $B(x_B, y_B)$   $C(x_C, y_C)$   
 et  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_B + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) x_C \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_B + \left(\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right) y_C \end{cases}$$

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :  $Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$  pour  $k \neq 0$

**Exercice :**

Soit  $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  où  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Montrer que  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$   
 Alors :  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

**Remarque :**

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

**Application :**

Construire le barycentre du système pondéré  $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1)\}$

**Cas particulier**

Si les poids  $\alpha; \beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$  s'appelle **le centre de gravité** du triangle  $ABC$ .

**Exercice 1 :**

Soit  $ABC$  un triangle. Pour tout point  $M$  on pose

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{AM} + \vec{BM} + 2\vec{CM} \\ \vec{v} = \vec{AM} + \vec{BM} - 2\vec{CM} \end{cases}$$

- 1- Réduire l'écriture de  $\vec{u}$ .
- 2- Montrer que le vecteur  $\vec{v}$  est constant.
- 3- Déterminer l'ensemble des points  $M$  tel que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.

**Exercice 2 :**

Déterminer les ensembles suivants :

$$\Delta = \{M \in (\mathcal{P}) / \|4\vec{AM} + 2\vec{BM} - \vec{CM}\| = \|\vec{AM} + 2\vec{BM} + 2\vec{CM}\|\}$$

$$\Gamma = \{M \in (\mathcal{P}) / \|\vec{AM} + \vec{BM} + 2\vec{CM}\| = \|3\vec{AM} - 2\vec{BM} - \vec{CM}\|\}$$

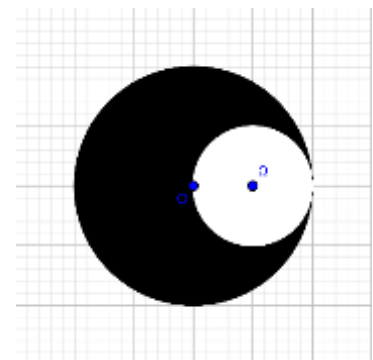
**Exercice 3 :**

Le solide  $(S)$  est constitué d'un disque  $(\mathcal{D})$  dont on a enlevé le disque  $(\mathcal{D}')$

$(\mathcal{D})$  est le disque de centre  $O$  et de rayon  $2R$

$(\mathcal{D}')$  est le disque de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$

Déterminer et tracer le centre de gravité du solide.



**5) Barycentre de quatre points pondérés**

3.1 Définition

**Propriété :**

Soit  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  l'application :

$$\varphi_4: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}_2$$

$$M \mapsto \alpha\vec{AM} + \beta\vec{BM} + \gamma\vec{CM} + \delta\vec{DM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie  $\varphi_4(G) = \vec{0}$

**Preuve :**  $\varphi_4$  est l'application de Leibniz pour quatre points

**Propriété :**

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$  et

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  On a pour tout point  $O$  du plan  $(\mathcal{P})$ :

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{S}\right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{S}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{S}\right) \overrightarrow{OC} + \left(\frac{\delta}{S}\right) \overrightarrow{OD} \text{ où } S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

**Preuve :** Même démonstration que dans les cas précédents.

**Propriété :**

Le plan  $(\mathcal{P})$  et rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , Soient  $A(x_A, y_A)$ ;  $B(x_B, y_B)$ ;  $C(x_C, y_C)$  et  $D(x_D, y_D)$

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right) x_A + \left(\frac{\beta}{S}\right) x_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right) x_C + \left(\frac{\delta}{S}\right) x_D \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right) y_A + \left(\frac{\beta}{S}\right) y_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right) y_C + \left(\frac{\delta}{S}\right) y_D \end{cases} \quad \text{Où } S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

**Propriété :**

Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :  $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$  pour  $k \neq 0$

**Exercice :**

Soit  $G = \text{Bar}\{\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}; (C, \gamma); (D, \delta)\}$  où  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$

Si  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  et  $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Montrer que :  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

**Propriété :**

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$

Si  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  et  $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors  $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

**Remarque :**

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

**Application :**

$ABCD$  un rectangle tel que :  $AB = 2BC$  Construire le barycentre du système pondéré  $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$

**Cas particulier**

Si les poids  $\alpha$ ;  $\beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \delta)\}$  s'appelle le **centre de gravité** du quadrilatère  $ABCD$ .

**Exercice :**

Déterminer des poids  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  pour les points  $A, B, C$  et  $D$  pour que  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  dans la figure ci-dessous

