Résumé de Cours LA ROTATION DANS LE PLAN

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

LA ROTATION DANS LE PLAN

I) RAPPELLES (La symétrie axiale).

Définition : Soit (D) une droite donnée.
La symétrie axiale d'axe $(\boldsymbol{D})$ se notre par $S_{(D)}$.
$S_{(D)}(M) = M'$ ssi °(D) est la médiatrice du segment $[MM']$
Un point N est invariant par $S_{(D)}$ ssi $N \in (D)$

Propriétés : La symétrie axiale conserve :
1)Les distances et Le milieu et le barycentre et les mesures des angles géométriques et
Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.
et inverse les mesures des angles orientés :
$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}\right)[2\pi]$

Propriété : La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

II) LA ROTATION DANS LE PLAN

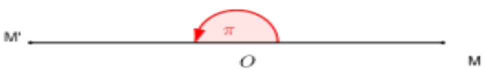
1) Définition :

1.1 Composition de deux symétries axiales

Propriété : Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ;
$S_{(\Delta)}$) et $S_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs
(Δ) et (Δ')
soit $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ').
L'application $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ transforme le point M en M'
tel que : $\begin{cases} OM = 0M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{0M'}}\right) \equiv 2\alpha[2\pi] \end{cases}$
L'application $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ s'appelle la rotation de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle $\boldsymbol{2\alpha}$

Définition : Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, la rotation de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et d'angle $\boldsymbol{\theta}$ est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :
$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$ On la note par : $R\ (\Omega, \theta)$

Remarque :1) Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.
2) La symétrie centrale S_O est la
Rotation de centre O et d'angle π

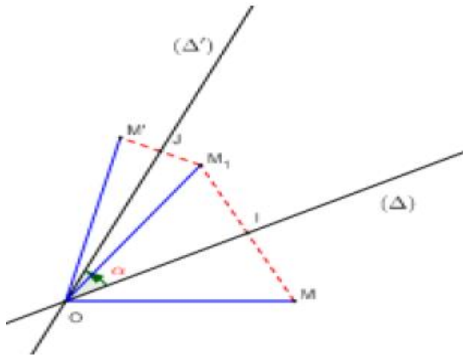


3)L'identité $\mathcal{J}dP$ est la rotation d'angle nul.
(Tous les points de (P) sont centre de cette rotation)

2) Propriétés de la rotation

2.1 La décomposition d'une rotation

Propriété : Soit R la rotation de centre O et
D'angle α ; la rotation R peut-être décomposée comme suite
1)$R = \boldsymbol{S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle **:** $\frac{\alpha}{2}$



2)$R = \boldsymbol{S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')}}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle : $-\frac{\alpha}{2}$

2.2 Propriété d'une rotation.

1)La rotation est une isométrie (elle conserve les distances) : si $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$
Alors $A'B' = AB$
2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points
3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.
4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques
5) La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

1) Composition de deux rotations de même centre

Propriété : La composition de deux rotations $R\ (\Omega, \alpha)$ et $R'(\Omega, \beta)$ de même centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $(\alpha + \beta)$:
$\boldsymbol{R'(\Omega, \beta)\ o\ R(\Omega,\alpha) = R''(\Omega,\alpha+\beta)}$.

Remarque : On sait que la rotation $R\ (\Omega, \alpha)$ est une bijection et sa bijection
Réciproque est $R'(\Omega, -\alpha)$
Donc :$R'(\Omega,-\alpha)oR(\Omega,\alpha) = R''(\Omega,0) = \mathcal{J}d_P$

2) Composition de deux rotations de centres différents.

2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

Propriété : La composition de deux symétries axiales $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ d'axes parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ') avec (D) une droite perpendiculaire à (Δ)
si $(\Delta) \parallel (\Delta')$ alors : $S'_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

2.2 Composition de deux rotations de centres différents.

Théorème : Soient $R\ (O, \alpha)$ et $R\ (\Omega, \beta)$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$
1°Si $\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha + \beta}$
2°Si $\boldsymbol{\alpha + \beta = 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une translation dans le plan.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.