

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de f en a :

$x_0 = 3$; $f(x) = \sqrt{2x+3} - 2$	$a = -1$; $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x-1}$	$a = 2$; $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$
$\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\frac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad a = 0$	$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2 \sin x}{x-\sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad a = 0$	$a = 0 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 2

Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche du point a dans les cas ci-dessous :

$a = 0$; $f(x) = x \sin(2x) $	$a = -2$; $f(x) = \frac{ x^2 + 2x - 3}{ x - 1}$	$a = -1$; $f(x) = \frac{ x^2 + x + 2}{ x + 1}$
$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+2} & ; x \geq -1 \\ f(-1) = x^2 + 2x & ; x < -1 \end{cases} \quad a = -1$	$a = 0 \quad \begin{cases} f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$	$a = 2$; $f(x) = (x-2)E(x)$

Exercice 3

En utilisant la notion de dérivabilité en un point déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 x - 3}{3x - \pi}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(8x+15)^7 + 1}{x+2}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n \sin x - a^n \sin a}{x-a}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(5x-4)^3 - 1}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^n - (1-x^2)^n}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \sin 2x)^3 - 1}{x}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ déterminer a et b sachant que la droite $(\Delta) y = 4x + 3$ est tangente à la courbe (C_f) en $A(0, 3)$

Exercice 5

Soit f la fonction telle que $f(x) = \frac{x^2 + a}{bx + 1}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer les réels b , a pour que (C_f) admet au point $I(0, 2)$ une tangente parallèle à la droite $(\Delta) 2x + y - 1 = 0$

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) = a$ calculer en fonction de a les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(-2x)}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(2x) + 2f(3x) - 5f(0)}{x}$$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants calculer la dérivée $f'(x)$

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$	$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$	$f(x) = x\sqrt{2x-1} + 5$	$f(x) = 2x - \sqrt{x} + \frac{3}{x}$
----------------------------------	---------------------------------	---------------------------	--------------------------------------

$f(x) = \frac{x^3}{x-3}$	$f(x) = x(\sqrt{x^2+1} + x)$	$f(x) = x^2\sqrt{4x+3}$	$f(x) = (2x-3)\sqrt{x} + 1$
$f(x) = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$	$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$	$f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$	$f(x) = \frac{x + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|}$$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) a) étudier la dérivabilité f à droite et à gauche de 0
- b) étudier la dérivabilité f à droite et à gauche de 1

Soit f la fonction telle que : $f(x) = \frac{x^2}{x|x|+1}$

- 1) déterminer le domaine de la fonction f
- 2) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$
- 4) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0

Exercice 9

Soient a un réel de \mathbb{R}^* et b de \mathbb{R}^+ . on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{a} E\left(\frac{3}{x}\right) & : x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{2\cos(bx) - 3\cos(x\sqrt{2}) + 1}{x} & : x < 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \left| \frac{x}{a} E\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{3}{a} \right| \leq \left| \frac{x}{a} \right|$
- b) en déduire que f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = \frac{3}{a}$
- 2) montrer que f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 3 - b^2$
- 3) déterminer b , a pour que f soit dérivable en 0 et la tangente en 0 est perpendiculaire à la droite $(\Delta) x - y = 0$

Exercice 10

- 1) montrer que si f est dérivable en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- 2) applications : a) (1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a}$ (2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}$
- b) on suppose que $f(a) > 0$ montrer que la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est dérivable en a et déterminer le nombre dérivé