Corrigés

1.

1. L'intersection des plans (SAB) et (SBC) est la droite (SB).
2. L'intersection des plans (SAD) et (SBC) est la droite passant par S, parallèle à (AD). (théorème du toit)
3. L'intersection des plans (SAB) et (SCD) est la droite passant par S, parallèle à (AB). (théorème du toit)
4. L'intersection des plans (SAC) et (SBD) est la droite (SI).
5. L'intersection des plans (SBD) et (ABC) est la droite (BD).
6. Les droites (SB) et (AC) sont non coplanaires.
7. Les droites (SC) et (AD) sont non coplanaires.
8. Les droites (SD) et (BI) sont sécantes en D.

2.

Les droites (AI) et (BE) sont contenues dans le plan (ABE). Comme elles ne sont pas parallèles, ni confondues, elles sont sécantes.

3.

a. Les droites (HI) et (EA) sont toutes deux contenues dans le plan (ADE) et ne sont pas parallèles, ni confondues, donc elles sont sécantes.
b. Les droites (HJ) et (CG) sont toutes deux contenues dans le plan (CDG) et ne sont pas parallèles, ni confondues, donc elles sont sécantes.
c. Soit I' le milieu de [EH]. ADHE étant un rectangle, (II') est parallèle à (AE).
Dans le triangle HEX, d'après le théorème de la droite des milieux :
(II') est parallèle à (EX) et I' est le milieu de [EH]. Donc I est le milieu de [HX].
Soit J' le milieu de [GH]. CDHG étant un rectangle, (JJ') est parallèle à (CG).
Dans le triangle HGY, d'après le théorème de la droite des milieux :
(JJ') est parallèle à (GY) et J' est le milieu de [GH]. Donc J est le milieu de [HY].
Comme X appartient à (HI) et Y appartient à (HJ), la droite (XY) est contenue dans le plan (HIJ).
Dans le triangle HXY, I est le milieu de [HX] et J est le milieu de [HY]. Donc (IJ) est parallèle à (XY).

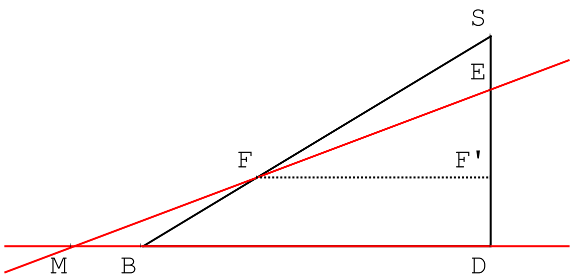
4.

a. (d) est parallèle à (BD), et (BD) est parallèle à (FH).

Donc (d) et (FH) sont parallèles, ce qui montre qu'elles sont coplanaires.
b. (d) est parallèle à (BD) et passe par A, donc (d) est contenue dans le plan (ABC).
La droite (BC) est elle aussi contenue dans le plan (ABC).
Comme (BD) et (BC) ne sont ni parallèles ni confondues, il en est de même pour (d) et (BC).
Par conséquent, les droites (d) et (BC) sont sécantes.
c. (HF) et (BD) sont parallèles.
Mais (BD) et (BC) ne sont pas perpendiculaires, donc (BC) et (FH) ne sont pas orthogonales.
On en déduit que (BC) et (AFH) ne sont pas orthogonaux.

5.
a. Les droites (BD) et (FH) sont parallèles.
Les droites (DE) et (CF) sont parallèles.
Les droites (BD) et (DE) sont sécantes en D et contenues dans le plan (BDE).
Les droites (FH) et (CF) sont sécantes en F et contenues dans le plan (CFH).
Ainsi, deux droites sécantes contenues dans le plan (BDE) sont respectivement parallèles à deux droites sécantes contenues dans le plan (CFH), donc ces deux plans sont parallèles.
b. Dans le triangle ABD, I et J sont les milieux de [AB] et [AD], donc (IJ) est parallèle à (BD).
Dans le triangle ADE, J et K sont les milieux de [AD] et [AE], donc (JK) est parallèle à (DE).
Les droites (IJ) et (JK) sont sécantes en J et contenues dans le plan (IJK).
Les droites (BD) et (DE) sont sécantes en D et contenues dans le plan (BDE).
Ainsi, deux droites sécantes contenues dans le plan (IJK) sont respectivement parallèles à deux droites sécantes contenues dans le plan (BDE), donc ces deux plans sont parallèles.
c. Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux. Comme les plans (IJK) et (CFH) sont tous deux parallèles au plan (BDE), on peut conclure que les plans (IJK) et (CFH) sont parallèles.

6.
E est un point sur le segment [SD], donc E appartient au plan (SDB).
F est un point sur le segment [SB], donc F appartient au plan (SDB).
Par conséquent, la droite (EF) est contenue dans le plan (SDB), ainsi que la droite (BD).
Les droites (EF) et (BD) sont coplanaires et non parallèles, donc elles sont sécantes.
Construction de la figure :
Le triangle SDB est rectangle en D.
SAD est isocèle, donc SD = AD = 3.
[BD] est une diagonale du rectangle ABCD. Avec le théorème de Pythagore, on obtient BD = 5.
On place E et F de telle façon que (EF) et (BD) ne sont pas parallèles. Le point M est à l'intersection des droites (EF) et (BD).



7.
a. S'ils étaient colinéaires, les vecteurs $\vec{\imath},\vec{k}$ seraient soit colinéaires soit vecteurs directeurs d'un plan. Dans tous les cas, les vecteurs $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ seraient coplanaires.
b. Cherchons s'il existe des réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$. On obtient le système :
$\begin{cases}3=\alpha+2\beta\\-1=-\alpha\\0=\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3=\alpha+2\beta\\\alpha=1\\\beta=-1\end{cases}$. La première équation étant incompatible avec les valeurs trouvées par ailleurs, ce système n'admet pas de solution. Ainsi, les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

8.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1;-3;-1)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc le système : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$, où t est un réel quelconque.

Dans ce système, $x = 0$ lorsque $t = -1$. Avec cette valeur du paramètre t, on obtient $y = 5$, ce qui ne correspond pas à la coordonnée du point C. Ainsi, C n'appartient pas à la droite (AB).

9.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-4;2;3)$. Puisque (d) et (d') sont parallèles, $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d'). Une représentation paramétrique de la droite (d') est donc le système :

$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, où t est un réel quelconque.

10.

La représentation paramétrique du plan permet de savoir que le point de coordonnées A(1;2;0) appartient à (P). Ce plan est dirigé par les deux vecteurs de coordonnées $\vec{u}$(-1;-3;4) et $\vec{v}$(1;-3;-5). Puisque la représentation paramétrique de (d) est celle d'une droite de vecteur directeur $\vec{v}$(1;-3;-5) passant par A(1;2;0), on peut conclure que (d) est incluse dans (P).

11.

Méthode 1 : dans une base orthonormée

Dans le repère (A ;AB,AD,AE), on a $\overrightarrow{AE}(0,0,1)$ et $\overrightarrow{DG}(1,0,1)$.

Le produit scalaire est donc $0 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$.

Méthode 2 : avec le cosinus.

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = AE \times AF \times cos(\widehat{FAE}) = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Méthode 3 : avec une projection orthogonale

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2 = 1$, car E est le projeté orthogonal de F sur (AE).

12.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

Or, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = AB \times CA \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = a \times a \times \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{a^2}{2}$

et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$.

On a donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$, ce qui implique que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Les arêtes [AB] et [CD] sont donc orthogonales.

13.

a. On a $\overrightarrow{AB}(3;0;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(5;-2;2)$.

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B, et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal au plan (ABC).

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul, d'où $3a + 0b - 3c = 0 \Leftrightarrow a = c$.

Comme $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul, d'où $5a - 2b + 2c = 0$.

Ainsi, on peut choisir $\vec{n}(2;7;2)$. Par conséquent, en écrivant que les coordonnées $(x;y;z)$ d'un point quelconque M du plan (ABC) sont telles que $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$, on obtient une équation du plan (ABC) :

$2(x-2) + 7(y-1) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 7y + 2z - 11 = 0$.

14.

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}(3;1;-5)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;-7;-2)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(-1)\times 3-7\times 1-2\times(-5)=0$. Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, on en déduit que (d) est orthogonale à (AB).

15.

Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}_P(1,-4,0)$.

Un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{n}_Q(1,2,-1)$.

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), les plans sont sécants. Soit (d) leur droite d'intersection.

Un point $M(x,y,z)$ est sur (d) s'il vérifie les deux équations des plans :

$$\begin{cases} x-4y+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y-7 \\ y=y \\ z=x+2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4t-7 \\ y=t \\ z=6t-6 \end{cases}$$

La droite (d) a donc pour vecteur directeur $\vec{u}_D(4,1,6)$ et passe par le point $A(-7,0,-6)$.

Remarque : on a choisi $y=t$ comme paramètre, il est possible de choisir x ou z, on obtiendra alors un autre système.

16.

Déterminons un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan (P_2). Posons $\overrightarrow{n_2}(a;b;c)$. On a $\overrightarrow{BC}(3;1;0)$ et $\overrightarrow{BD}(4;4;1)$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{n_2}$, donc $3a+b=0$ et $4a+4b+c=0$.

On peut donc choisir $\overrightarrow{n_2}(1;-3;8)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_2}(1;-3;8)$ et $\vec{n}(-1;3;-8)$ sont opposés, ils sont donc colinéaires. Par conséquent, les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles ou confondus. Une équation du plan (P_1) est $-(x-2)+3y-8z=0$, équation qui n'est pas vérifiée par le point C. (P_1) et (P_2) sont donc parallèles.

17.

Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}_P(2,0,-1)$.

Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}_D(1,-3,0)$.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs étant non nul, ils ne sont pas orthogonaux, ce qui signifie que (D) et (P) sont sécants. En utilisant les équations paramétriques dans l'équation du plan : $2=2(t-1)\Leftrightarrow t=2$, ce qui donne les coordonnées du point d'intersection : $(1,-6,2)$.

18.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t\ ,t\in\mathbb{R} \\ z=5+t \end{cases}$.

Une équation du plan (P) est $1(x+3)+2(y-1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow x+2y+z-1=0$.

Cherchons d'éventuels points en commun : $2+t+2(1-t)+(5+t)-1=0\Leftrightarrow 0t+8=0$

Cette équation n'a pas de solutions. La droite (D) ne coupe donc pas le plan (P).

19.

a. Les représentations paramétriques des droites (D_1) et (D_2) s'interprètent de la façon suivante :

Comme $\begin{cases} x = 3+a \\ y = 9+3a \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = a \\ y-9 = 3a \\ z-2 = 0 \end{cases}$, alors $M(x;y;z) \in (D_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{u_1}$, avec $A(3;9;2)$ et $\overrightarrow{u_1}(1;3;0)$.

Comme $\begin{cases} x = 0,5+2b \\ y = 4+b \\ z = 4-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0,5 = 2b \\ y-4 = b \\ z-4 = -b \end{cases}$, alors $M(x;y;z) \in (D_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = b\overrightarrow{u_2}$, avec $B(0,5;4;4)$ et $\overrightarrow{u_2}(2;1;-1)$.

b. Pour montrer que deux droites de l'espace ne sont pas coplanaires, il suffit de montrer qu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Comme $\overrightarrow{u_1}(1;3;0)$ et $\overrightarrow{u_2}(2;1;-1)$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles.

Cherchons maintenant un point commun à (D_1) et (D_2). Pour cela, cherchons un couple de coefficients $(a;b)$ pour lequel un point de coordonnées $(x;y;z)$ appartient aux deux droites :

$$\begin{cases} 3+a = 0,5+2b \\ 9+3a = 4+b \\ 2 = 4-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+a = 4,5 \\ 9+3a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont incompatibles, donc (D_1) et (D_2) n'ont pas de point en commun : elles ne sont pas sécantes.

N'étant ni parallèles, ni sécantes, on en déduit que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

c. Cherchons une équation de (P_1), plan contenant S(3 ;4 ;0,1) et (D_1).

Le point A(3;9;2) appartient à (D_1). Ainsi $\overrightarrow{u_1}(1;3;0)$ et $\overrightarrow{SA}(0;5;1,9)$ sont deux vecteurs orthogonaux à un vecteur $\overrightarrow{n_1}(\alpha,\beta,\gamma)$, normal au plan (P_1). On a donc $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{u_1} = 0$ et $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{SA} = 0$, soit $\alpha + 3\beta = 0$ et $5\beta + 1,9\gamma = 0$.

Choisissons $\beta = 1,9$, il vient : $\alpha = -5,7$ et $\gamma = -5$. Donc $\overrightarrow{n_1}(-5,7;1,9;-5)$.

Ainsi, une équation du plan (P_1) est $-5,7(x-3)+1,9(y-9)-5(z-2) = 0$.

Cherchons s'il existe une valeur de b qui permettrait de trouver les coordonnées d'un éventuel point commun à (D_2) et (P_1) : $-5,7(-2,5+2b)+1,9(b-5)-5(2-b) = 0 \Leftrightarrow -4,5b-5,25 = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{7}{6}$

Donc (D_2) est sécante à (P_1).

d. Utilisons cette valeur dans la représentation paramétrique de (D_2) :

$$\begin{cases} x = 0,5+2\times(-\frac{7}{6}) = -\frac{11}{6} \\ y = 4+(-\frac{7}{6}) = \frac{17}{6} \\ z = 4-(-\frac{7}{6}) = \frac{31}{6} \end{cases}$$

. Le point H a donc pour coordonnées $(-\frac{11}{6};\frac{17}{6};\frac{31}{6})$.

20.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\vec{u}_{AB}(-1,0,1)$.

Un vecteur directeur de la droite (CD) est $\vec{u}_{CD}(-1,-1,3)$.

On en déduit deux systèmes d'équations paramétriques, un pour chaque droite. (attention à prendre soin de choisir un paramètre différent pour chacun)

(AB) : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$. (CD) : $\begin{cases} x=-t'+3 \\ y=-t'-2 \\ z=3t' \end{cases}$. D'où le système : $\begin{cases} -t+1=-t'+3 \\ -1=-t'-2 \\ t=3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t+1=-t'+3 \\ t'=-1 \\ t=-3 \end{cases}$.

Les deux valeurs trouvées pour les deux paramètres sont compatibles avec la première équation puisque $-t+1=4$ et $-t'+3=4$. Le système admet une unique solution, le couple $(t,t')=(-3,-1)$. Les droites sont donc sécantes en un point $\mathrm{I}(4,-1,-3)$.

21.

a) On détermine un vecteur normal à chaque plan : $\vec{n}_P(2,-1,-1)$, $\vec{n}_Q(1,2,-1)$, $\vec{n}_R(0,1,1)$.
On vérifie rapidement que ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires, ni orthogonaux deux à deux.

$$\begin{cases} 2x-y-z+3=0 \\ x+2y-z-1=0 \\ y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5=0 \\ x-3z-5=0 \\ y=-z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ z=-\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Le système admet une unique solution : deux des trois plans sont donc sécants selon une droite elle-même sécante au troisième plan, en un point de coordonnées $(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{1}{2})$.

b) On détermine un vecteur normal à chaque plan : $\vec{n}_P(1,1,0)$, $\vec{n}_Q(1,0,-1)$, et $\vec{n}_R(0,1,1)$.
On vérifie rapidement que ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires, ni orthogonaux deux à deux.

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z-4=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+5=0 \\ x=z+4 \\ y+z=0 \end{cases}$$

La première et la troisième équation sont incompatibles, le système n'admet donc pas de solution : Puisque les plans ne sont pas parallèles entre eux, les trois plans sont sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles.

22.

1. Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal au plan (P) et colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}=a(x_{\mathrm{H}}-x_{\mathrm{A}})+b(y_{\mathrm{H}}-y_{\mathrm{A}})+c(z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{A}})=ax_{\mathrm{H}}+by_{\mathrm{H}}+cz_{\mathrm{H}}-ax_{\mathrm{A}}-by_{\mathrm{A}}-cz_{\mathrm{A}}=-ax_{\mathrm{A}}-by_{\mathrm{A}}-cz_{\mathrm{A}}-d$,
puisque H est dans (P). On en déduit alors que $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}\right|=\left|-ax_{\mathrm{A}}-by_{\mathrm{A}}-cz_{\mathrm{A}}-d\right|=\left|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d\right|$.

2. La colinéarité des deux vecteurs permet d'écrire que $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}\right|=\mathrm{AH}\times\left\|\vec{n}\right\|$, ce qui donne

$\mathrm{AH}\times\left\|\vec{n}\right\|=\left|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d\right|$, et finalement $\mathrm{AH}=\dfrac{\left|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}=\dfrac{\left|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

3. a. Ces deux plans étant parallèles (puisque le vecteur $\vec{n}(1,1,0)$ est normal aux deux plans), la distance entre ces deux plans est la distance entre un point quelconque du premier plan à son projeté orthogonal dans le deuxième. Par exemple, le point O(0,0,0) est dans le premier plan.

En appliquant la formule précédente, on obtient : $\left|\dfrac{1\times0+1\times0+0\times0-5}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}\right|=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

b. Une équation du plan passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$ est :
$-(x-1)+(y-2)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow -x+y+2z-7=0$

$$d=\left|\frac{(-1)\times 1+1\times(-2)+2\times 1-7}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}\right|=\left|\frac{-8}{\sqrt{6}}\right|=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

c) La distance du point A au plan (P) est $d=\left|\frac{1\times 1+(-2)\times 1-2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\left|\frac{-3}{\sqrt{3}}\right|=\sqrt{3}$. Comme cette distance est égale au rayon de la sphère, on en déduit que le plan est tangent à la sphère.

23.

1. On a $\overrightarrow{AB}(2;0;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, et C déterminent un plan. Notons $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal au plan (ABC).

Comme $\vec{n}(a;b;c)$ et $\overrightarrow{AB}(2;0;-1)$ sont orthogonaux, il vient : $2a-c=0$.

Comme $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, il vient : $b+c=0$.

On peut donc choisir $\vec{n}(1;-2;2)$.

Pour tout point M du plan (ABC), on a $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, ce qui est équivalent à
$x-1-2(y-2)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-1=0$.

Une équation du plan (ABC) est $x-2y+2z-1=0$.

2. a. Le plan (P_1) est le plan (ABC) étudié ci-dessus. Un vecteur normal au plan (P_2) est $\overrightarrow{n_2}(1;-3;2)$.
Les coordonnées des vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b. Comme $1-2\times 3+2\times 3-1=0$ et $1-3\times 3+2\times 3+2=0$, les coordonnées de C vérifient les équations des deux plans. Le point C est donc sur la droite (d), intersection des deux plans.

c. Cherchons les coordonnées d'un point D tel que $\overrightarrow{CD}=\vec{u}$. Posons $D(x_D;y_D;z_D)$.

$\overrightarrow{CD}=\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-1=2 \\ y_D-3=0 \\ z_D-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=3 \\ y_D=3 \\ z_D=2 \end{cases}$. On a donc trouvé $D(3;3;2)$.

Comme $3-2\times 3+2\times 2-1=0$ et $3-3\times 3+2\times 2+2=0$, les coordonnées de D vérifient les équations des deux plans. Le point D est donc aussi sur la droite (d).

Comme C et D sont tous deux des points de la droite (d), on en déduit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d).

3. a. Comme la droite (d) passe par C et a pour vecteur directeur $\vec{u}$, une représentation paramétrique de la droite (d) s'écrit : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$

b. On a $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-2)=(2t;1;1-t)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux si, et seulement si

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow 2\times 2t+0\times 1+(-1)\times(1-t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{5}$

c. Avec cette valeur du paramètre, on obtient le point H de coordonnées $\begin{cases} x=1+2\times\frac{1}{5}=\frac{7}{5} \\ y=3 \\ z=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5} \end{cases}$.

La distance du point A à la droite (d) est la distance AH.

AH = $\sqrt{(\frac{7}{5}-1)^2+(3-2)^2+(\frac{14}{5}-2)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}+1+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

24.

1. a. R est le milieu de [BF], donc $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{k}$, ce qui donne les coordonnées de R dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: R$(1,0,\frac{1}{2})$.

Soit M un point de coordonnées (x,y,z) appartenant à la droite (AR). Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AR}$.

Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AR}$ sont $(1,0,\frac{1}{2})$ et celles de $\overrightarrow{AM}$ sont (x,y,z), ce qui permet d'écrire un système d'équations paramétriques de la droite (AR) : $\begin{cases} x=k \\ y=0 \quad ,k\in\mathbb{R} \\ z=\frac{1}{2}k \end{cases}$.

b. Comme S est tel que , il vient $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ES}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{j}+\vec{k}$, ce qui donne les coordonnées de S dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: S$(0,\frac{2}{3},1)$.

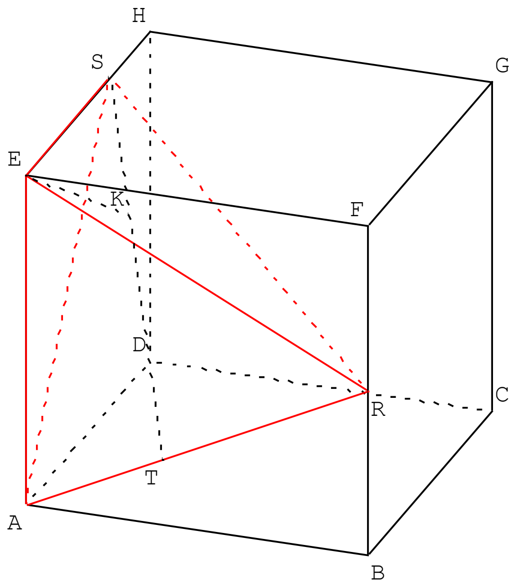
Le plan (P) est l'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont orthogonaux. Or, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{SM}$ sont $(x,y-\frac{2}{3},z-1)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, ce qui s'écrit : $1\times x+0\times(y-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times(z-1)=0$. Ainsi, une équation cartésienne du plan (P) passant par S et perpendiculaire à la droite (AR) est donc $x+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$, ou $2x+z-1=0$.

c. Le point T appartient à la droite (AR), donc ses coordonnées vérifient le système d'équations paramétriques de la question a, elles s'écrivent donc $(k;0;\frac{1}{2}k)$, avec $k\in\mathbb{R}$. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont orthogonaux, donc T appartient au plan étudié à la question b. Les coordonnées de T vérifient donc l'équation trouvée ci-dessus : $2k+\frac{1}{2}k-1=0\Leftrightarrow k=\frac{2}{5}$, ce qui donne les coordonnées de T : $(\frac{2}{5};0;\frac{1}{5})$.

d. L'aire du triangle ARS est $\mathcal{A}_{ARS}=\frac{1}{2}ST\times AR$. Or, $AR=\sqrt{1^2+0^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, et

$ST=\sqrt{(\frac{2}{5}-0)^2+(0-\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{5}-1)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{4}{9}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{56}{45}}=\frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}$.

donc l'aire du triangle ARS est $\mathcal{A}_{ARS}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{6}$.



2. a. Une base du tétraèdre est le triangle ARE. Comme ABFE est une face du cube, c'est un carré. Et comme R est le milieu de [BF], le triangle ARE est isocèle en R. L'aire $\mathcal{A}_{ARE}$ de ce triangle est donc $\mathcal{A}_{ARE} = \frac{1}{2}$.

Comme S est sur l'arête [EH], (ES) est orthogonale à la face ABFE. La hauteur du tétraèdre ARSE correspondant à cette base est donc [ES] et $ES = \frac{2}{3} \times EH = \frac{2}{3}$.

Ainsi, le volume du tétraèdre ARSE est $\mathcal{V}_{ARSE} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ARE} \times ES = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.

b. Notons K le pied de la hauteur du tétraèdre ARSE issue de E. En utilisant la base ARS et sa hauteur [EK] correspondante, le volume de ce tétraèdre ARSE s'écrit :

$\mathcal{V}_{ARSE} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ARS} \times EK = \frac{1}{9}$, d'où $EK = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

La distance du point E au plan ARS est égale à $\frac{\sqrt{14}}{7}$.