

Exercice 1

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 - \frac{2}{x} + 1$

1) montrer que g est croissante sur $]1, +\infty[$

2) on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + x - 2}}$$

a) montrer que $D_f =]1, +\infty[$

b) vérifier que $(\forall x \in D_f) f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

c) en déduire le sens de variation de f

Exercice 2

on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

1) Montrer que f minorée

2) a) montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ est-elle une valeur maximale de f ?

3) on pose $h(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

a) montrer que $T_g = \frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b) étudier les variations de g sur $[0,1]$

et sur $[1, +\infty[$

c) soient a et b deux réels de \mathbb{R}^{*+} tels que :

$$a + b \geq 2. \text{ montrer que } a + b + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$$

d) vérifier que $f = g \circ h$ puis étudier les variations de f sur D_f

Exercice 3

soient a, b et c des réels de \mathbb{R}^+

on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - (b+c)x + b^2 + c^2 - bc$$

1) dresser le tableau de variations de f

2) en déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par :

$$g(x) = (x-1)^3 \text{ et } f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

1) montrer que $T_g = \left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2$

2) vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

3) étudier les variations de f sur \mathbb{R}^{*+} et \mathbb{R}^{*-}

Exercice 5

soit la fonction f telle que $f(x) = x^3 + x^2 + x$

1) montrer que

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x^2 + y^2 + xy + x + y + 1 > 0$$

2) étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R}

3) on pose $h(x) = \frac{x + \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x}}$

a) Vérifier $h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b) En déduire la monotonie de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

1) déterminer le domaine D et montrer que la droite

$$(\Delta) x = \frac{1}{2} \text{ est axe de symétrie}$$

2) a) en utilisant un raisonnement par équivalence successive montrer que f est minorée par 1

b) 1 est-elle valeur minimale de f ?

3) calculer $(f(x))^2$ puis déduire que f est majorée par $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est-elle valeur maximale de f ?

4) a) montrer que :

$$T_f = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}}$$

b) étudier les variations de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

5) on pose $h(x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$

a) montrer que $h = f \circ g$ puis étudier les variations de h