Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1

Dans chacune des cas ci-dessous étudier si f et g sont égaux ?

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^2$; $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2$

3) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$; $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

EXERCICE 2

On pose $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ déterminer D_f et montrer que $(\forall x\in D)\quad 0<f(x)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x|x|}{x^2+1}$

1) étudier la parité de f et montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad 0\le f(x)<1$

2) en déduire que f est bornée

3) a) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}^+$ $x\ne y$ on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{2(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

b) étudier le sens de variation de f su $\mathbb{R}^+$ puis déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+x+1}$

1) déterminer D_f et montrer que $(\forall x\in D_f)\quad f(x)\le 1$ en déduire que f est bornée

2) f admet-elle une valeur minimale ? valeur maximale ?

3) a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+)$ $f(x)-f(y)=\dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$

b) étudier le sens de variation de f sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$

c) en déduire les variations de f sur $[-1,0]$ et $]-\infty,-1]$

Exercice 5

1) soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Déterminer deux fonctions g et h telles que $f=g\circ h$ puis étudier le sens de variation de f

2) on considère la fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

Déterminer deux fonctions g et h telles que $f=g\circ h$ puis étudier le sens de variation de f

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$

1) Etudier la parité de f
2) Montrer que 4 est la valeur minimale de f sur $]0,+\infty[$
3) a) montrer que $(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)\ f(x) - f(y) = (x-y)\left(1 - \frac{4}{xy}\right)$

   b) étudier le sens de variation de f sur $]0,2]$ et $[2,+\infty[$

   c) en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^{*-}$

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1) montrer que f admet sur $]0,+\infty[$ un extremum en $\frac{1}{2}$ dont on préciseras la nature
2) a) montrer que $(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)\ f(x) - f(y) = (x-y)\left(4(x+y) - \frac{1}{xy}\right)$

   b) étudier les sens de variations de f sur les intervalles $\left]0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ et $]-\infty,0[$

   c) en déduire que $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{3},1\right]\right)\ f(x) \in [3,5]$

3) on pose $g(x) = 4x|x| + \frac{1}{x}$

   étudier la parité de g puis étudier les variations de g

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

1) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}$ et $x \neq y$ on a : $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = x^2 + y^2 + xy - 3$
2) étudier le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$; $]-\infty,-1]$ et $[-1,1]$
3) soient $a_n,\ldots\ldots\ldots,a_2,a_1$ des réels de $\mathbb{R}^+$ و tels que : $a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots \times a_n = 1$

   Montrer que $(2 + a_1^3)(2 + a_2^3) \times \ldots\ldots \times (2 + a_n^3) \geq 3^n$

4) soit h la fonction telle que : $h(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$

   Vérifier que $f(\sqrt{x+2}) = h(x)$ en déduire les variations de h sur $[-1,+\infty[$ et $[-2,-1]$