Cours de 1ere Sciences math BIOF

FONCTIONS - Généralités

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une ***fonction*** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y. On note : x $\overset{f}{\longmapsto}$ y

ou encore $f : x \mapsto y$

ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-2) Exemples

Exemple1 :

a)Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ ou $g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}$.

Ou $h(x) = \frac{2x-1}{5x-4}$ ou $l(x) = \sqrt{x}$

$R(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonctions homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple2 :

Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f.

2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f,

Réponses : 1) $f(1) = 3\times1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et

$f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 4$

$f(-1) = 3\times(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

2) $f(x)=2$ ssi $3\times x^2-1=2$

ssi $3\times x^2=2+1$ ssi $3\times x^2=3$ ssi $x^2=1$

ssi $x=-1$ ou $x=1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

1-3) Domaine de définitions

activités

a. On considère la fonction définie par : $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D f

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$.

14) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x\left(x^2-2\right)=0$ ssi $x=0$ ou

$x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ ssi $x\leq 2$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $-3x\geq -6$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0 \quad a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et

$x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq0\right\}$ soit Δ son discriminant

$a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-9x+3}{x+1}\geq0 et x+1\neq0\right\}$

$-9x+3=0$ ssi $x=\frac{1}{3}$ ssi $-9x=-3$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\right\}$

$-2x^2+x+3=0 \quad a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines

$x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq0\right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$

Or on sait que $|x|\geq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

12) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $\quad D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq0 et x-1\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq-2 et x\neq1\right\}$

$D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

13) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-x\geq0 et x\neq0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq0 et x\neq0\right\}$

$D_f=]-\infty,0[$

14) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq0\right\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\}$

$2\cos x-1=0$ ssi $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ ssi $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0 et x^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:
Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6:
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et

$x_2'=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et

$x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow|x|^2+2|x|-3=0$ on pose $|x|=X$ donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ n'a pas de solution

$|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 et 3-5x\geq 0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\dfrac{1}{2} et x\leq\dfrac{3}{5}\right\}$

Donc $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1 Définitions

a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition : On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et et seulement si :

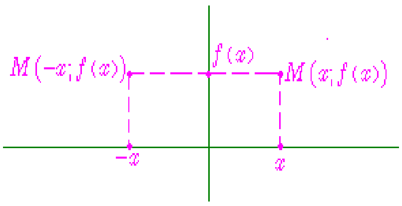
Pour tout réel x, si $x\in D_f$, alors $-x\in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$\mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R}-\{0\}$)	$\mathbb{R}-\{1\}$
$\mathbb{R}-\{-1;1\}$	$\mathbb{R}-\{-1;2\}$
$[-4;\ 4]$	$[-4;\ 3]$

2.2. Fonction paire

On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x)=kx^n$ est paire.

(c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)

- la fonction $x\mapsto|x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x\mapsto\cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

2.3. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

-si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x\mapsto kx^n$ est impaire,

-la fonction $x\mapsto\sin(x)$ est impaire,

-la fonction $x\to\tan x$ est impaire,

-l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,

-l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,

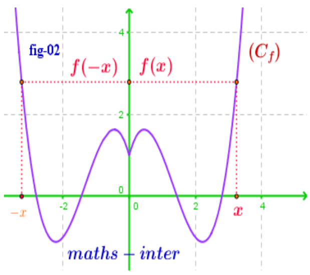
-la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,

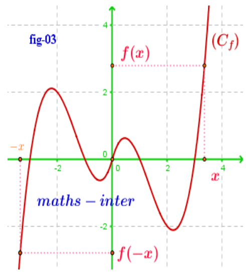
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Fonction paire **Fonction impaire**





Exemple 1 :

1) Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2-5$

Donc $D_f=\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\dfrac{3}{x}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$

donc $D_g=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\dfrac{3}{-x}=-\dfrac{3}{x}$

  $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_h=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $h(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$

  $h(-x)=-(2x^3-x^2)\neq-h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x)=\dfrac{x}{x-2}$

on a $t(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq0$ ssi $x\neq2$

Donc $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$

on a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

Exemple 2 :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$.

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$.

Solutions :1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}=x^2-\frac{1}{x}=\left(-x^2+\frac{1}{x}\right)$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\frac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exemple 3 : Soit la fonction définie par : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ Pour tout réel x

1)montrer que f est une fonction impaire

2)donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$

On a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1)

Pour tout réel x

On remplaçant x par –x on trouve :

$5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1)+ (2) donne : $6(f(-x)+f(x))=0$ donc :

$f(-x)+f(x)=0$

donc : $f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f est une fonction impaire

2)on a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc :

$5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

Exemple 4 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$ et (C_f) la courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R} / |x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors

$-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante - fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors

$f(x_1)\prec f(x_2) \quad (f(x_1)\leq f(x_2))$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors

$f(x_1)\succ f(x_2) \quad (f(x_1)\geq f(x_2))$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

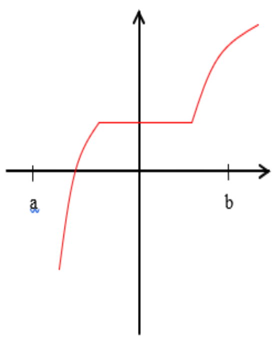
- Dire f que est constante sur I signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1 \prec x_2$

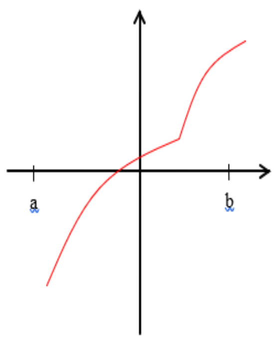
alors $f(x_1)=f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur [a,b], mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur [a,b]

Exemples : 1) Soit f une fonction tq :

$f(x)=7x-5$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1\prec 7x_2$ car $7\succ 0$

Donc $7x_1-5\prec 7x_2-5$

Alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

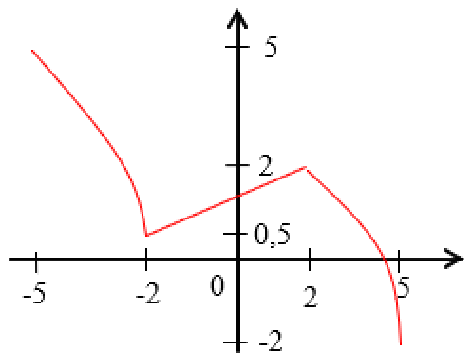
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b)tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

3)



x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5 $\searrow$	0,5 $\nearrow$	2 $\searrow$	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tq :

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Exemple : Soit f une fonction tq :

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

Exemples :

1)Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0; +\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

2)Soit f une fonction tq : $g(x) = \frac{x}{x+1}$ on

a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x + 1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1 + 1} - \frac{x_2}{x_2 + 1} = \frac{x_1(x_2 + 1) - x_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

a)sur $I =]-\infty; -1[$

Soit $x_1 \in]-\infty; -1[$ et $x_2 \in]-\infty; -1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec -1$ et $x_2 \prec -1$ Donc $x_1 + 1 \prec 0$ et $x_2 + 1 \prec 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \succ 0$ sur $I =]-\infty; -1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty; -1[$

b)sur $J =]-1; +\infty[$

Soit $x_1 \in]-1; +\infty[$ et $x_2 \in]-1; +\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$ Donc $x_1 + 1 \succ 0$ et $x_2 + 1 \succ 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \succ 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \succ 0$

sur $J =]-1; +\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1; +\infty[$

c) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

3-3) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Exemple : Soit f une fonction :tq : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I =]0; 1]$ puis sur $J = [1; +\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$=\frac{x_1^2\times x_2+x_2-x_2^2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}$

$=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$

$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$

a)sur $I=]0;1]$ Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$

Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$ Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ Donc $x_1x_2-1\succ 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I
Donc f est strictement décroissante sur I'
f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

5) Les variations des deux fonctions : αf et f+α

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

- Si $\alpha\in\mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha\in\mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variation opposées sur I
- f et α+f ont les mêmes variations sur I

Exemples :

1)soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$g(x)=\frac{6}{x}$

On sait que la fonction $f:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et puisque $6\succ 0$ donc la fonction $g=6f$ est aussi décroissante sur $[0;+\infty[$

2)Soit f et g les fonction numérique :

$f(x)=x^2$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$h(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ Donc alors les fonctions f et g ont des variation opposées sur $\mathbb{R}$

g et h ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↗	0	↘	

6) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives) Fonctions majorées ; minorées et bornée :

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement si : Elles ont même ensemble de définition : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

et Pour tout $x\in D_f$: f (x) = g(x) et On écrit : $f=g$

Exemple : Les fonction f et g définies respectivement par :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Réponse :

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$

donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$

on a f (x) = g(x)

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies

Sur I. On dit que :

1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$. On note : $f\leq g$ Sur I.

2)f est positive sur I lorsque : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$. On note : $f\geq 0$ sur I.

3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x)\leq M$ pour tout $x\in I$

4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m\leq f(x)$ pour tout $x\in I$

5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m\leq f(x)\leq M$ $\forall x\in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$ ssi La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$ ssi La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I

6-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ donc $f\prec g$

Exemple2 Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Exemple3 Soient les deux fonctions : $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x)=\dfrac{1+3x^2}{|x|}$

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

or on sait que $x^2\geq 0$ donc $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

alors $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $|x|\neq 0$ ssi $x\neq 0$

donc $D_g=\mathbb{R}^*$

alors $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2}=|x|$ et $3x^2+1=1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouvé que : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x)

Donc : f=g.

Exemple4 Soient les deux fonctions : $h(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

- on a $h(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$

- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

Exemple5 Soit f la fonction numérique tel que:

$$f(x)=\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$$

Etudier le signe de le fonction f

Solution : $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow$ $x\neq -\dfrac{1}{2}$ et $x\neq\dfrac{1}{2}$

Donc : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$f(x)\geq 0$ ssi $x\in\left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{1}{2};2\right]$ donc $f\geq 0$ $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{1}{2};2\right]$

$f(x)\leq 0$ ssi $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

Exemple6 Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x)=-x^2+x=-(x^2-x)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$

donc : $f(x)\leq\frac{1}{4}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=\frac{1}{4}$

Exemple7 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$ est Bornée.

Solution : On a $\forall x\in\mathbb{R}$ $-1\leq\sin x\leq 1$ donc
$-4\leq 4\sin x\leq 4$
donc $-4-3\leq 4\sin x-3\leq 4-3$
donc $-7\leq g(x)\leq 1$ g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple8 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.
Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$
donc $D_f=\mathbb{R}$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ donc $\frac{1}{x^2+1}\leq 1$

donc $f(x)\leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=1$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ donc $x^2+1\succ 0$

Donc : $0\prec f(x)$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=0$

conclusion : $0\leq f(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple9 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$.Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\neq 0\}$

$\Delta=-3\prec 0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-1(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x)-1=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ or $x^2+3x+3\succ 0$ car $\Delta=-3\prec 0$

(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)}\leq 0$$

par suite f est majorée par $\frac{7}{3}$.

conclusion : $1\prec f(x)\leq\frac{7}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple10 Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1)déterminer les valeurs de m pour que $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tq :

$g(x)=\frac{1}{x+2}$ déterminer les valeurs de m pour que $\forall x\in\{-2;1\}$ on a : $f(x)=g(x)$

Solution :

1) $D_f=\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:x^2+x+m\neq 0$

$x^2+x+m\neq 0$ ssi $\Delta=b^2-4ac=1-4m\prec 0$

Ssi $m\succ\frac{1}{4}$

2) $f(x)=g(x)$ $\forall x\in\{-2;1\}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{x-1}{x^2+x+m}=\frac{1}{x+2}$$

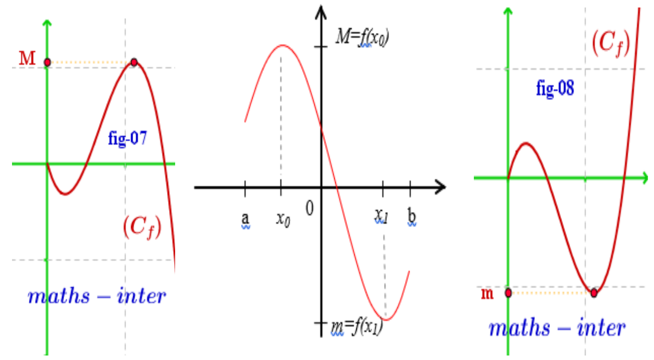
$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x + m \Leftrightarrow$

$x^2 + x - 2 = x^2 + x + m$

$f(x) = g(x)\ \forall x \in \{-2;1\} \Leftrightarrow -2 = m$

7) Les extremums d'une fonction Numérique

7-1)) Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $x \in I$: $f(x) \le f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \ge f(a)$

7-2) Exemples d'applications :

1° Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = 5x^2 + 3 \qquad D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \ge 0$ Donc $5x^2 \ge 0$ car $5 \succ 0$

Par suite $5x^2 + 3 \ge 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \ge f(0)$

d'où $f(0)=3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$g(x) = -4x^2 + 1 \qquad D_g = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \ge 0$ Donc $-4x^2 \le 0$ car $-4 \prec 0$

Par suite $-4x^2 + 1 \le 1$ et on a $g(0) = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \le g(0)$

d'où $g(0) = 1$ est un maximum absolue de g sur $\mathbb{R}$

7-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1°a) montrer que $f(x) = 6 - (2x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) \le 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses: 1°a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$6 - (2x-1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$

$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$

Donc : $f(x) = 6 - (2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2 \ge 0$

Par suite $-(2x-1)^2 \le 0$ donc $6 - (2x-1)^2 \le 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \le 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1-1)^2 = 6$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $6 - (2x-1)^2 \le 6$ alors $f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exemple2 : Du tableau de variation on a :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	0,5	↗	2	↘	-2

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

Exemple3 :

Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x) \le 1$ et que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x) - 1 = -x^2 + 4x - 3 - 1 = -x^2 + 4x - 4$

$f(x) - 1 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2 \le 0$

Donc $f(x) \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ et on a :

$f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Donc 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\leq f(2)\ \forall x\in\mathbb{R}$

que $f(2)=1$ est le maximum absolue de f sur $\mathbb{R}$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :

1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a)soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)-3=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\dfrac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x)-3=\dfrac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ par suite $f(x)\leq 3\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x)\leq f(0)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

2) a)soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)-2=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\dfrac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc $f(x)-2=\dfrac{1}{x^2+1}\succ 0$ par suite :

$0\prec f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=2$

b) on remarque que : $f(x)\succ 2\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

conclusion : $2\prec f(x)\leq 3\quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1)étudier le signe de f

2) a)Démontrer que f est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) est ce que $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution : 1) soit $x\in]1;+\infty[$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$

$f(x)=\dfrac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$

Donc $f(x)\succ 0$ si $x\in]1;+\infty[$

2) a) $x\in]1;+\infty[$ montrons que $f(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x\in]1;+\infty[$ donc $x\succ 1$ cad $x+1\succ 2$

donc $\sqrt{x+1}\succ\sqrt{2}$ donc $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\prec\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

donc $f(x)\prec\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

conclusion : $2\prec f(x)\leq 3\quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x)\leq f(0)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x)\neq\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in]1;+\infty[$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exemple6 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1))Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution : 1)

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\neq 0 et x\geq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq -2 et x\geq 0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\geq -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq 0$$

Donc $f(x)\geq -1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et on a :

$$f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolue de f sur $\mathbb{R}^+$

3) soit $x\in\mathbb{R}^+$ $\quad f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc $f(x)\prec 1\quad\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in\,]1;+\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exemple7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que f est minorée.
b) est ce que f admet une valeur minimale ?
2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2\geq 0$

donc : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

et on a : $f(1)=2$ donc : $f(x)\geq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:(x-1)^2+2\leq M$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:(x-1)^2\leq M-2$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{M-2}$ (on peut toujours supposer $M\geq 2$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\leq\sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}\leq x-1\leq\sqrt{M-2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1\leq x\leq\sqrt{M-2}+1\quad\forall x\in\mathbb{R}$ absurde

Donc f est non majorée

8) Etude et représentation graphique des fonctions $x\xrightarrow{f}ax^2+bx+c$

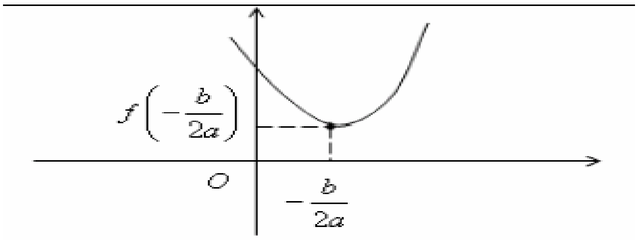
8-1)Résumé : $f(x)=ax^2+bx+c$ et $a\neq 0$

1° Dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

2° Les variations de f

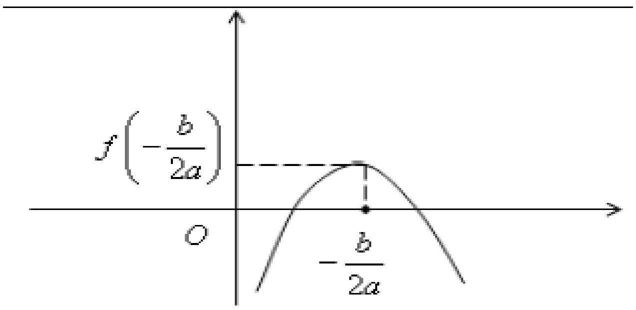
Si $a\succ 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗



Si $a\prec 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘



2-2) Exemples :

1° Soit f une fonction numérique

tq : $f(x)=2x^2-4x-2$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $\left(f(1)=2-4-2=-4\right)$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4$

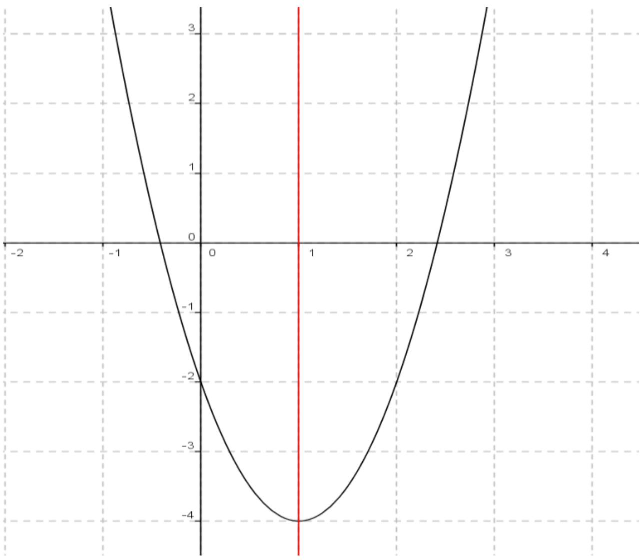
Soit $W(1;-4)$ Donc dans le repére $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;-4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



$W(1;-4)$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1$

$\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

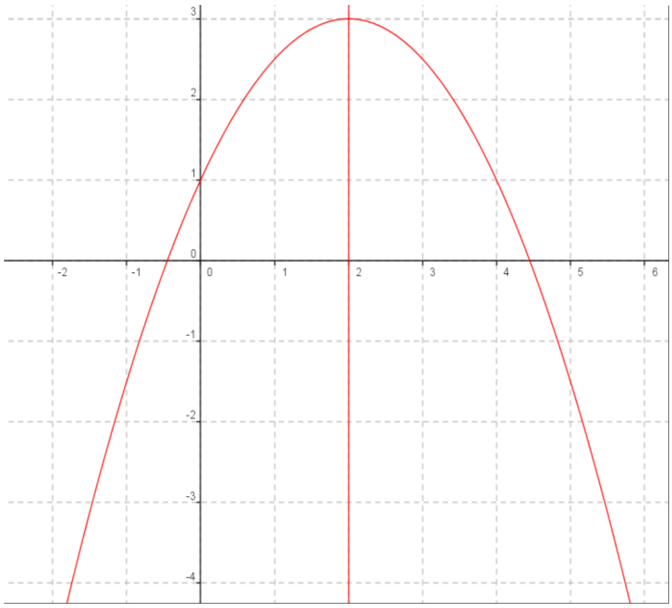
$\left(g(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$

Soit $W(2;3)$ Donc dans le repére $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

<u>Tableau de variations de f</u>

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$



9) Etude et représentation graphique des fonctions homographique :

$x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad a \neq 0$ et $c \neq 0$

9-1)Résumé et propriété :1)Soit f une fonction tq : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $cx+d \neq 0$ ssi $x \neq -\dfrac{d}{c}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{d}{c}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ ‖ $\nearrow$

2iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \prec 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{d}{c}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖ $\searrow$

9-2) Exemples :

Exemple1: Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \prec 0$

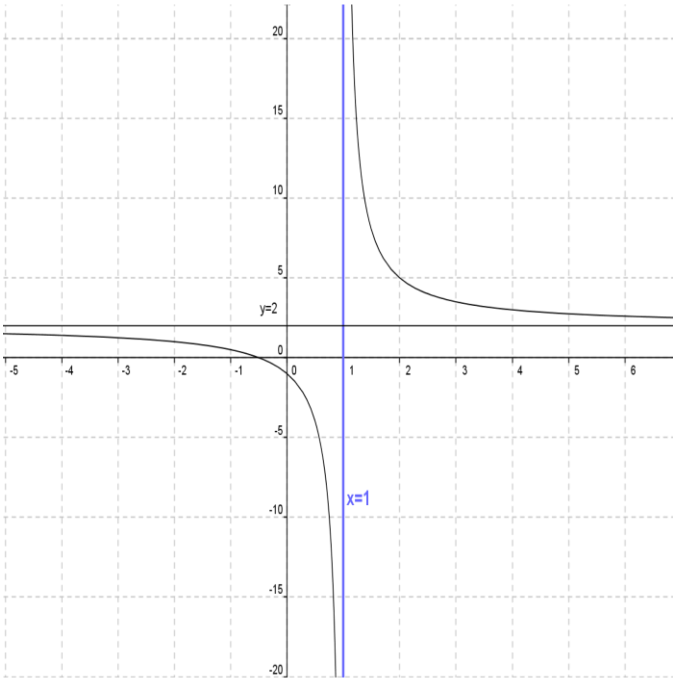
• Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖ $\searrow$

• Représentation graphique

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$



Exemples2:

Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \succ 0$

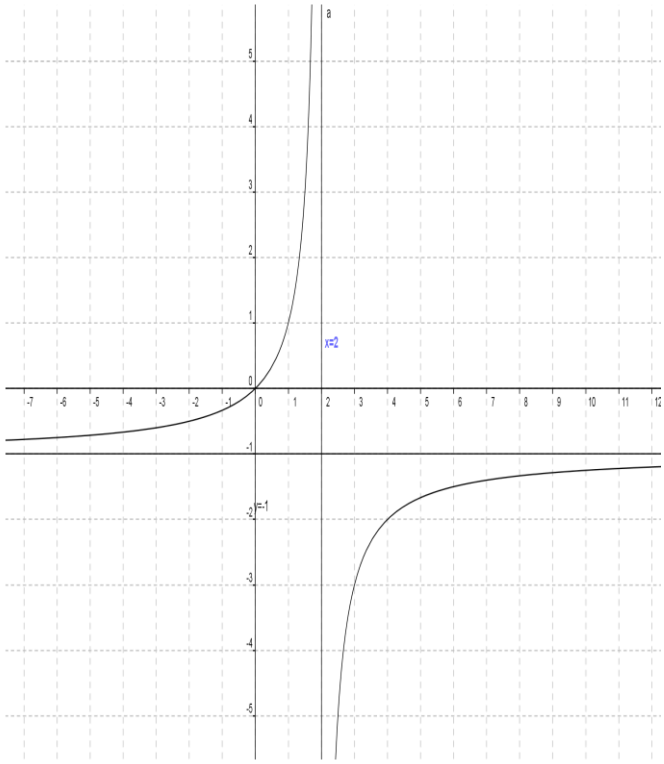
• Donc le tableau de variations

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ ‖ $\nearrow$

• Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

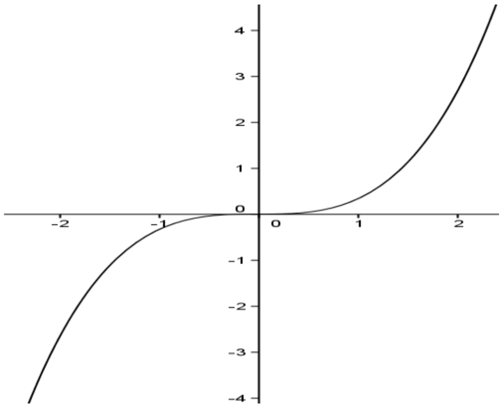
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	↗

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



11) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2,+\infty[$

2)soient $x_1 \in [-2;+\infty[$ et $x_2 \in [-2;+\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1+2 < x_2+2$ Donc : $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$

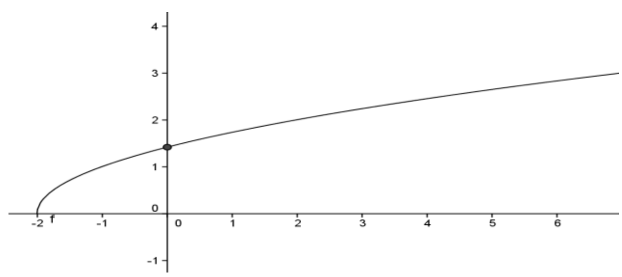
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2 $+\infty$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



12) Fonction Partie entière

12-1)Définition : Soit x un nombre réelle
La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Notation : La partie entière de x est maintenant notée : $E(x)$ ou $[x]$

Exemples : $E(4,2)=4$; $E(-3,75)=-4$; $E(\sqrt{3})=1$; $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

12-2)Propriété :1) $\forall x\in\mathbb{R}$ $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

2) $\forall x\in\mathbb{Z}$ $E(x)=x$

Un nombre x est entier si et seulement si il est égal à sa partie entière

2) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ $E(x+n)=n+E(x)$

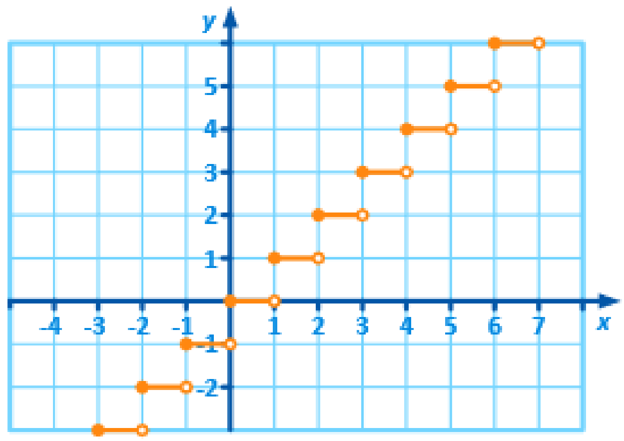
Exemples :déterminer: $E(\pi)$ et $E\left(3+\frac{1}{n}\right)$ si $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Solutions : 1)on a : $3\leq\pi\prec 4$ donc $E(\pi)=3$

2) on a : $E\left(3+\frac{1}{n}\right)=3+E\left(\frac{1}{n}\right)$ or $0\leq\frac{1}{n}\prec 1$ donc $E\left(\frac{1}{n}\right)=0$ Par suite : $E\left(3+\frac{1}{n}\right)=3+0=3$

12-3) représentation graphique de la fonction $x\to E(x)$:

$\forall k\in\mathbb{Z}$ Si $k\leq x\prec k+1$ alors $E(x)=k$ donc
Voici la courbe représentative
De la fonction partie entière :



13)La composée de deux fonctions

13-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que : $\forall x\in I$ $f(x)\in J$
La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté : $g\circ f$ définie sur I par :
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ $\forall x\in I$
On peut alors faire le schéma suivant :
$x\to f(x)=y\to g(f(x))=z$

13-2) Exemples

Exemple1 : Soit les fonctions f et g tel que : $f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=2x+1$
Déterminer : $g\circ f$ et $f\circ g$

Solution :on a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc
$D_{g\circ f}=\mathbb{R}$ et $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x+3)=2(x^2-2x+3)+1$

$(g\circ f)(x)=2x^2-4x+7$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2-2(2x+1)+3$

$(f\circ g)(x)=4x^2+4x+1-4x-2+3=4x^2+2$

Remarque :1)La composée de deux fonctions n'est pas commutative
c.-à-d. $g\circ f\neq f\circ g$
2)Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.
$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f et f(x)\in D_g\}$

Exemple2: Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=3x+4$ et $g(x)=\frac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g\circ f}$
2) déterminer : $(g\circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f et f(x)\in D_g\}$

On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ donc
$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} et f(x)\neq -1\}$

$f(x)=-1\Leftrightarrow 3x+4=-1\Leftrightarrow 3x=-5\Leftrightarrow -\frac{5}{3}=x$

donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

2)on a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

et $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=\frac{1}{3x+4+1}$

$(g\circ f)(x)=\frac{1}{3x+5}$

Exemple3 : Soit les fonctions f et g définies par : $g(x)=\frac{x}{x+2}$ et $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h 2) déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonctions k définie par : $k(x)=\frac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1)on a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et

$D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f etf(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -1etf(x)\neq -2\}$

$f(x)=-2\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1}=-2$

$\Leftrightarrow -2(x+1)=x+3\Leftrightarrow -3x=5\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$

donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$

$$h(x)=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1}+2}=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}}=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{3x+5}{x+1}}=\frac{x+3}{3x+5}$$

Donc : $h(x)=\frac{x+3}{3x+5}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$ et $D_k=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

Exemple4 : exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x)=\frac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$

Solution : 1) $h_1(x)=\frac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=3x-1$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

13-3) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f (I).

➩ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g\circ f$ Est croissante sur I.

➩ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f (I) alors là fonction $g\circ f$ est décroissante sur I.

Remarque : Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaire

La fonction g ◦ f est décroissante sur I

Exemple1: Soit f la fonction f définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ tel que : $f(x)=-5x^2+7$

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaire :

$v(x)=-5x+7$ et $u(x)=x^2$

La fonctions $f=v\circ u$

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et

$u(x)=x^2\in[0;+\infty[$ et l

v est décroissante sur

$[0;+\infty[$ Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f=v\circ u$ est décroissante sur

$[0;+\infty[$

Exemple2::Soit la fonction h définie sur $]-\infty;1]$

par $h(x)=\sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon $h=g\circ f$

on a alors : $f(x)=1-x$ et $g(x)=\sqrt{x}$

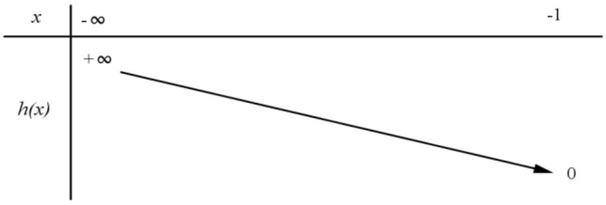
2) On sait que :

➩ f est décroissante sur $]-\infty;1]$

➩ g est croissante sur $f(]-\infty;1])=[0;+\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $]-\infty;1]$

On a alors le tableau de variation suivant



14) Fonctions périodiques :

Définition :On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.
On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x \in D$ on a $x+T \in D$

b) $\forall x \in D$ on a $f(x+T)=f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réelle strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.
2. La fonction $x \to E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.
3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T=2\pi$ et la fonction tangente est périodique de période $T=\pi$

4) La période des fonctions: $f : x \to \cos(ax)$ et $f : x \to \sin(ax)$ $a \neq 0$ est $T=\frac{2\pi}{a}$

Exemple1 : Montrer que la fonction $f : x \to x-E(x)$ est périodique de période 1.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a:

$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

Exemple2 : Quelle est la période des fonctions suivantes :

1) $f : x \to \sin(4x-1)$ 2) $g : x \to \cos(5x)$

3) Trouver une fonction de période $T=\frac{3}{4}$

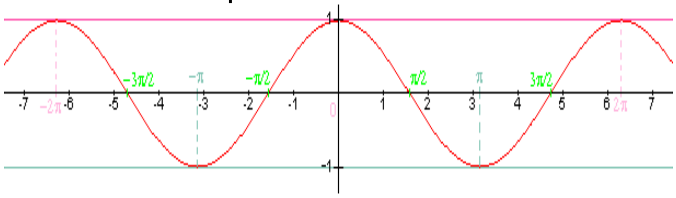
Solution :1) $T=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 2) $T=\frac{2\pi}{5}$

3)Une fonction est. $h : x \to \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

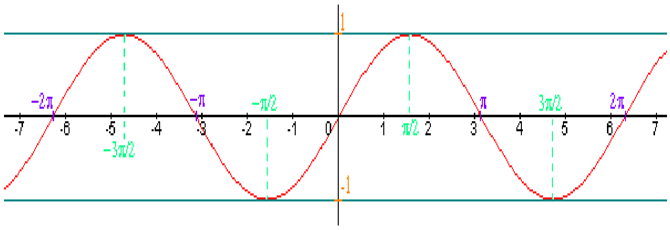
Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période
Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

Exemple3 : Observons une courbe représentative de la fonction cos on a $T=2\pi$ et sur $[-\pi;\pi]$ dont la longueur est égale à 2π

La courbe se répète tous les $T=2\pi$



Exemple4 : courbe représentative de la fonction sin :



Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$ tel que : $f(x)=2x-x^2$ $\forall x \in [0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repére $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

3) donner l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[$ $k \in \mathbb{Z}$

Solution : dans l'intervalle $I_0=[0;2[$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$

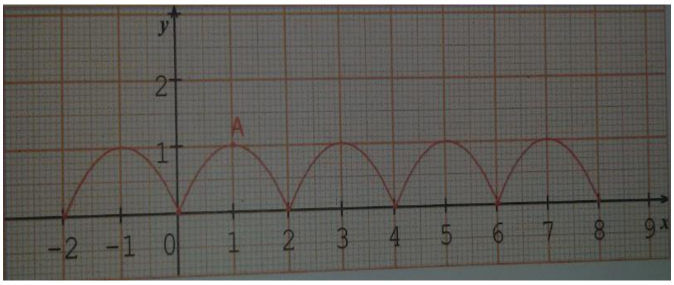
$(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=1$ et $(f(1)=2-1=1)$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2[$

et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$



2) calculer :

$f(4.1) = f(2+2.1) = f(2.1) = f(2+0.1) = f(0.1)$

$f(4.1) = 2(0.1) - (0.1)^2 = 0.19$

$f(-3.5) = f(-4+0.5) = f(0.5)$

$f(-3.5) = 2(0.5) - (0.5)^2 = 0.75$

$f(265.11) = f(2\times 132 + 1.11) = f(1.11)$

$f(1.11) = 2(1.11) - (1.11)^2 \approx 0.98$

3) l'expression de : $f(x) = 2x - x^2$ sur les intervalles : $I_k = [2k; 2(k+1)[\quad k \in \mathbb{Z}$

$x \in I_k = [2k; 2(k+1)[\Leftrightarrow 2k \le x \prec 2(k+1)$

$x \in I_k \Leftrightarrow 0 \le x - 2k \prec 2 \Leftrightarrow f(x-2k) = f(x)$

$x \in I_k \Leftrightarrow f(x) = 2(x-2k) - (x-2k)^2$ avec

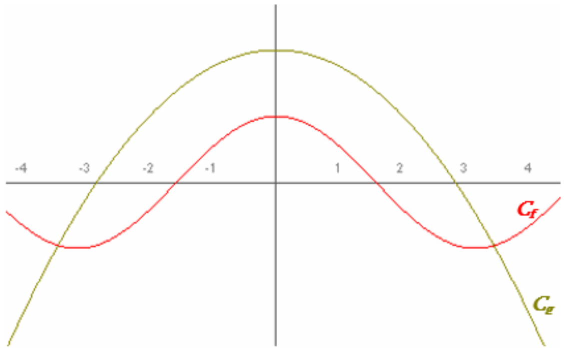
$k \le \frac{x}{2} \prec k+1$ cad $k = E\left(\frac{x}{2}\right)$

15) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées `a la physique, la chimie, l'´économie, ?

1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g.



On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y) \in (C_f)$ ssi $y = f(x)$

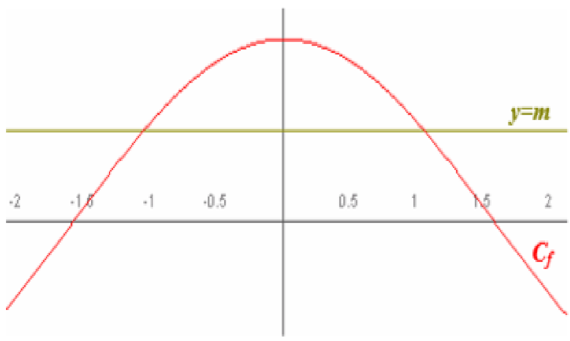
$M(x;y) \in (C_g)$ ssi $y = g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a $M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$ donc

soit $f(x) = g(x)$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \ge g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \le g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g) .



Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \ge m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$

• Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

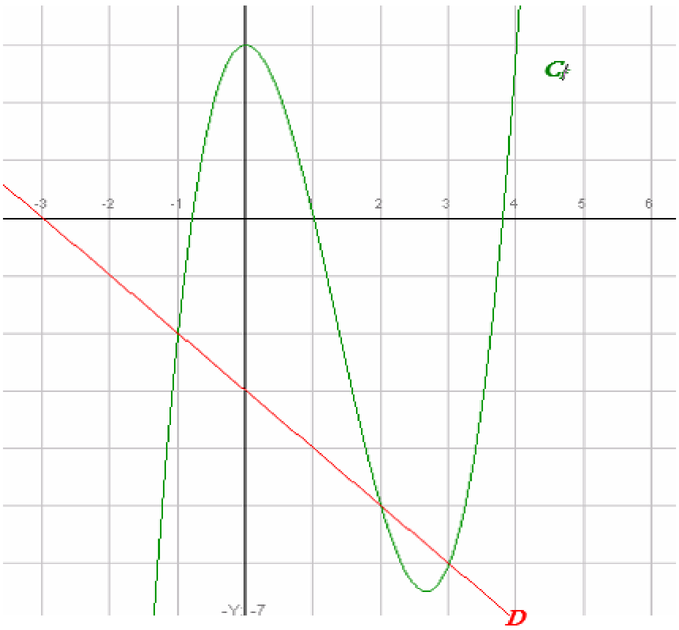
2) Quelques exercices d'application

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ puis l'inéquation $f(x) \prec 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f(x) \geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$



Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0;4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{a;1;b\}$ Avec $-1 \prec a \prec -0.5$ et $3.5 \prec b \prec 4$

$f(x) \geq 0 \quad S = [a;1] \cup [b;+\infty[$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y = -x - 3$ donc $S = \{-1;2;3\}$

$f(x) \leq -x - 3 \quad S =]-\infty;-1] \cup [2;3]$

Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

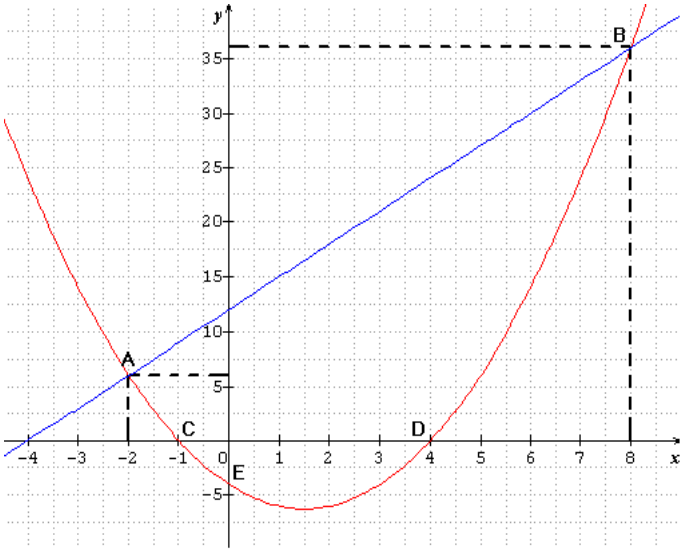
1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2;8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ ssi $x^2 - 3x - 4 = 3x + 12$ ssi $x^2 - 6x - 16 = 0$

$a = 1$ et $b = -6$ et $c = -16$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8$ et

$x_2=\frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

donc $S=\{-2;8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

$f(x)\succ g(x)$ ssi $x^2-3x-4\succ 3x+12$ ssi $x^2-6x-16\succ 0$

Les racines sont : $x_1=8$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $x^2-3x-4=0$

$a=1$ et $b=-3$ et $c=-4$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25=(5)^2>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a $f(0)=0^2-3\times0-4=-4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$

Exercice3: Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l' axes des abscisses

b)Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l' axes des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4) a)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b)Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Réponses : 1)a) $f(x)=-x^2-2x+3$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $(f(-1)=4)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

<u>Donc le tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

1)b) $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+2\neq0$

ssi $x\neq-2$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\succ0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=1$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$ $\quad -2$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $-x^2-2x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et

$x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$ donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

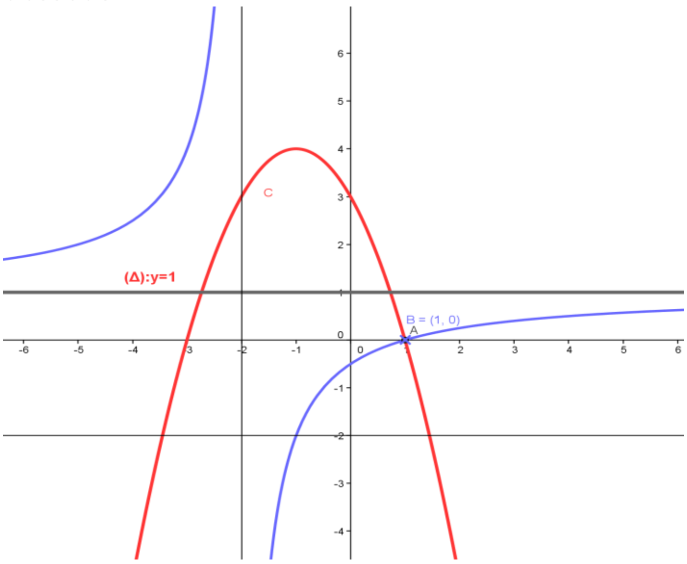
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

$g(x)=0$ ssi $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

3)Représentation graphique

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ donc $S=\{1\}$

4)b) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-2;1]$

Donc $S=]-2;1]$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ Conclure

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq0$$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\succ0$ donc $1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\succ1$

donc $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\succ1$ donc $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\succ2$

donc $\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}\prec\dfrac{1}{2}$ donc $f(x)\prec\dfrac{1}{2}$

et on a : $f(0)=0\prec\dfrac{1}{2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\prec\dfrac{1}{2}$

par suite f est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

conclusion : $0 \prec f(x) \prec \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple5 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

3) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

soit $x \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4$

$f(x) = \left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 4$ donc

$f(x) + 4 = \left(x + \sqrt{x}\right)^2 \geq 0$

donc $f(x) + 4 \geq 0$ donc $f(x) \geq -4$

et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

donc $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x + \sqrt{x}\right)^2 - 4 \leq M$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x + \sqrt{x}\right)^2 \leq M + 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \leq \sqrt{M+4}$ (on peut toujours supposer $M \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4} + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \leq \sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \left(\sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$ Absurde

Donc f est non majorée

Exercice6 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par:

$f(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ et

$h(x) = x^2 + 2$

1)a)Etudier les variations de g et de h

b)étudier le signe de la fonction g

2)montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3)Etudier les variations de f dans les intervalles :

$]1;+\infty[$; $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Réponses :1)a) $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x - 1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \prec 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 2$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

1)a)on a h est une fonction polynôme donc $D_h = \mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

b)étudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f et f(x) \in D_g\}$

2)montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

$(h \circ g)(x) = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 + 2 = \frac{4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2}$

$(h \circ g)(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3)Etude des variations de f dans les intervalles :

a) sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$:

On a $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x)=(h\circ g)(x)$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] : g(x)\in[0;+\infty[$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $\forall x \in \left[-\frac{3}{2};1\right[: g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ et h est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

c) sur $]1;+\infty[$:

Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[\ g(x)\in]0;+\infty[$ et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$

<u>Donc le tableau de variations de</u> f :

x	$-\infty$	$-3/2$		1		$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

http:// abcmaths.e-monsite.com

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

prof: Atmani najib