I. RAPPELS :

A. Fonction numérique :

a. Définition :

- Toute relation f qui associe chaque élément x de $\mathbb{R}$ par un élément au plus y de $\mathbb{R}$ est appelée **fonction numérique de la variable réelle** x on note $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x) \end{array}$.
- Tous les éléments x de $\mathbb{R}$ qui ont images par f constituent un ensemble , on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition) on le note D_f ou D .

B. Fonction paire – fonction impaire :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

- (f est **paire** sur D_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in D_f \ , -x\in D_f \\ \forall x\in D_f \ , f(-x)=f(x) \end{cases}$.
- (f est **impaire** sur D_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in D_f \ , -x\in D_f \\ \forall x\in D_f \ , f(-x)=-f(x) \end{cases}$.

C. Monotonie d'une fonction numérique :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I .

- f est une fonction croissante (strictement croissante) sur I $\Leftrightarrow \left(\forall x,x'\in I; x<x' \Rightarrow f(x)\le f(x')\right)$ ($\Leftrightarrow \left(\forall x,x'\in I; x<x' \Rightarrow f(x)<f(x')\right)$. (le sens de l'inégalité ne change pas))
- f est une fonction décroissante (strictement décroissante) sur I $\Leftrightarrow \left(\forall x,x'\in I; x<x' \Rightarrow f(x)\ge f(x')\right)$ ($\Leftrightarrow \left(\forall x,x'\in I; x<x' \Rightarrow f(x)>f(x')\right)$. (le sens de l'inégalité change)
- f est une fonction constante sur I $\Leftrightarrow \left(\forall x,x'\in I; f(x)=f(x')\right)$.

b. Remarque :

- $D_f = I\cup I'$ tel que I et I' sont symétrique par rapport à zéro .
- Si f est paire ou impaire sur $D_f = I\cup I'$ alors il suffit d'étudier f sur $D_E = D_f\cap\mathbb{R}^+ = I$ on l'appelle ensemble de d'étude (ou domaine d'étude) .
- Si f est paire sur $D_f = I\cup I'$ alors les variations de f sont opposées sur I et I'.
- Si f est impaire sur $D_f = I\cup I'$ alors les variations de f sont les même sur I et I'.

D. Extrémums d'une fonction :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0\in D_f$.

- $f(x_0)$ est valeur maximale absolue de f (f admet valeur maximale absolue au point x_0) si et seulement si : $\forall x\in D_f \ , f(x)\le f(x_0)$.
- $f(x_0)$ est valeur minimale absolue de f (f admet valeur minimale absolue au point x_0) si et seulement si : $\forall x\in D_f \ , f(x_0)\le f(x)$.

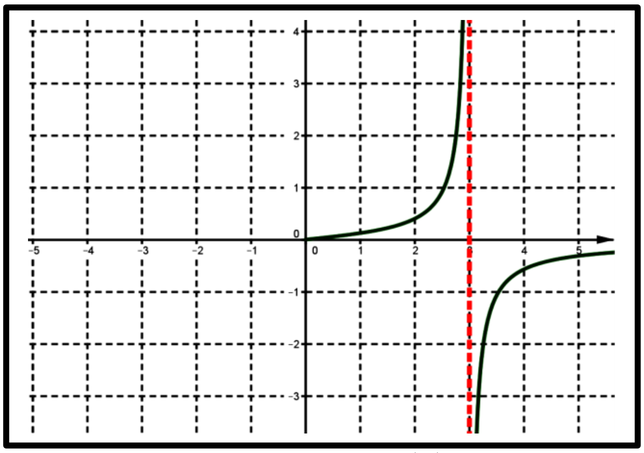
E. Applications :

- **Application 1 :**

1. Compléter le tableau de variation et la courbe de la fonction f sachant que f est :

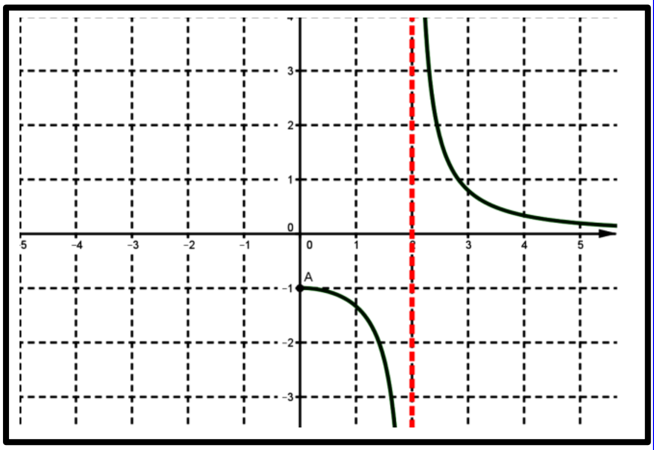
a. f est paire sur D_f **(cas n ° 1)**

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$			‖		0	↗	‖	↗	



b. f est impaire sur D_f **(cas n ° 2)**

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$			‖		-1	↘	‖	↘	



2. Que représente $f(0)$ pour la fonction pour le cas n ° 1.

- **Application 2 :**

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f .

2. Etudier la parité de f . On déduit l'ensemble D_E d' étude de f .

3. Etudier la monotonie de f sur $[0,1[$ puis sur $]1,+\infty[$.

4. On déduit la monotonie de f sur $]-1,0]$ puis sur $]-\infty,-1[$.

5. Dresser le tableau de variation de f sur D_E puis sur D_f .

6. Est-ce que f admet un extremum ? à déterminer .

II. A ajouter complément :

A. Extremums relatives :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0 \in D_f$.

- $f(x_0)$ est valeur maximale relative de f (f admet valeur maximale relative au point x_0) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert I_{x_0} de centre x_0 tel que $I_{x_0} \subset D_f$ on a :
$\forall x \in I_{x_0}, f(x) \le f(x_0)$.
- $f(x_0)$ est valeur minimale relative de f (f admet valeur minimale relative au point x_0) si et seulement si : : il existe un intervalle ouvert I_{x_0} de centre x_0 tel que $I_{x_0} \subset D_f$ on a :
$\forall x \in I_{x_0}, f(x_0) \le f(x)$.

B. Taux d'accroissement d'une fonction f :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle I.

x et x' de I tel que $x \neq x'$ le nombre $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ s'appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre x et x', on note T_f .

b. Application :

Calculer le taux d'accroissement de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=2x$.

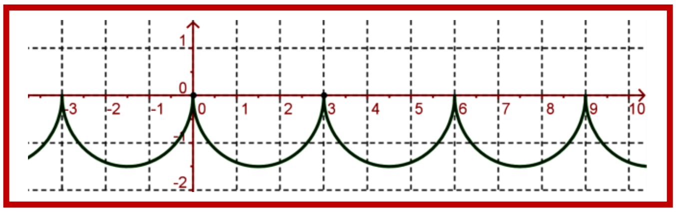
c. Propriétés :

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I.

- Si $T_f \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I .
- Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si $T_f \geq 0$ alors la fonction f est croissante sur I .
- Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur I .

C. Fonction périodique :

a. Activité :



La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On prend x de $\mathbb{R}$.

1. Placer sur l'axe des abscisses x et $x+3$.
2. Déterminer graphiquement $f(x)$ puis $f(x+3)$.
3. Quelle remarque peut-on tirer ?

b. Vocabulaire :

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+3)=f(x)$ on dit que la fonction f est périodique sur $\mathbb{R}$ et son période est 3 on note : $T=3$ ou $P=3$.

c. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $T \in \mathbb{R}^{+*}$ ($T>0$).

la fonction f est périodique sur D_f et son période est T si et seulement si :

- $x \in D_f \Rightarrow (x+T \in D_f$ et $x-T \in D_f)$. (1)
- $\forall x \in D_f : f(x+T)=f(x)$. (2)

d. Remarque :

- T le plus petit réel strictement supérieur à 0 qui vérifie la relation (2) .
- $f(x)=\sin x$ et $f(x)=\cos x$ sont périodique de période $T=2\pi$.
- $f(x)=\tan x$ est périodique de période $T=\pi$.

e. Application :

- Montrer que $f(x)=\sin ax$ (avec $a \neq 0$) est une fonction périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.
- f est une fonction périodique de période T sur D_f . montrer que :

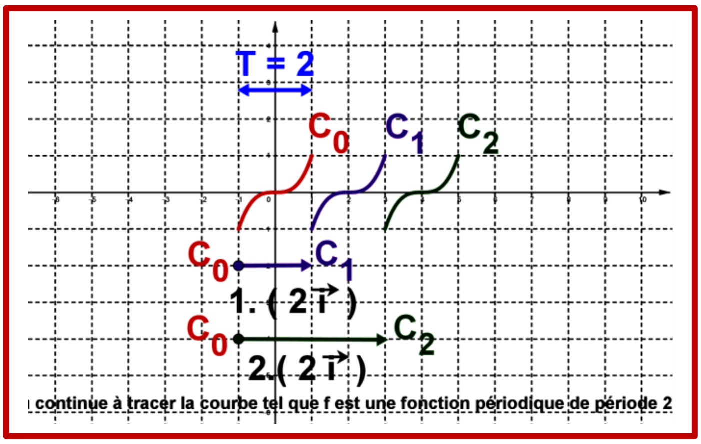
1. $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \forall x \in D_f\ :f(x+nT)=f(x)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \forall x \in D_f\ :f(x-nT)=f(x)$
3. Quel propriété obtenue ?

f. La courbe d'une fonction périodique :

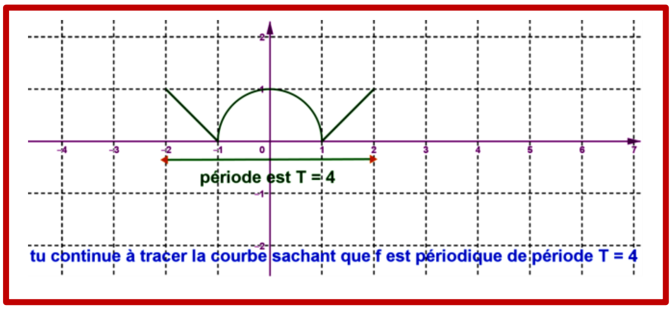
f est une fonction périodique de période T sur D_f .

- On considère les ensembles suivants : $I_k=[a+kT,a+(k+1)T]\cap D_f$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
  ($[a+kT,a+(k+1)T]$ est un intervalle de longueur T).
- C_k les courbes représentative de f sur I_k .
- Pour construire les courbes C_k , on construit d'abord C_0 sur $I_0=[a,a+T]\cap D_f$.
- Puis on translate la courbe C_0 par des translations de vecteurs $\vec{u}=kT\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Exemples :

Exemple n° 1



Exemple n° 2



III. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée - extremums d'une fonction f :

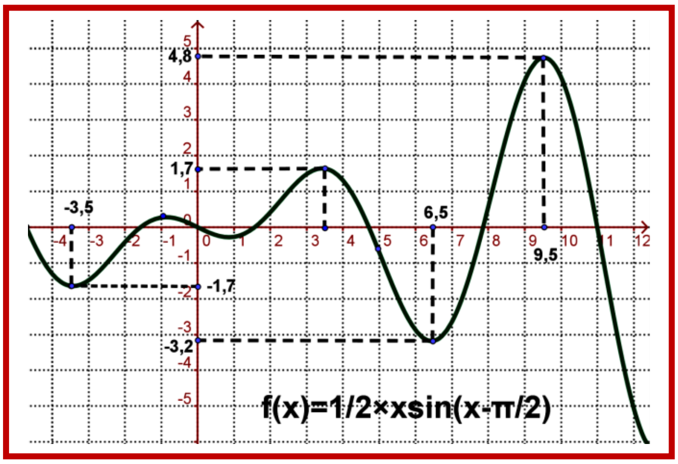
A. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée :

a. Activité :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f .

Compléter par le symbole qui convient :

1. $\forall \in[-4;11]\ :\ f(x).......5$.
2. $\forall x.....[-4;11]\ :\ -4.......f(x)$.
3. $\forall x\in[\cdots,\cdots]:-4.....f(x)......5$.



b. Vocabulaire : on dit que :

- La fonction f est majorée par 5 sur $[-4,11]$ (ou par 6 .....) .
- La fonction f est minorée par -4 sur $[-4,11]$ (ou par -7 .....) .
- La fonction f est bornée 5 sur $[-4,11]$.

c. Définitions :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur I ($I \subset D_f$). M et m de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est majorée par M sur I si et seulement si : $\forall x \in I$; $f(x) \leq M$ (ou $f(x) < M$)
- La fonction f est minorée par m sur I si et seulement si : $\forall x \in I$; $m \leq f(x)$ (ou $m < f(x)$)
- La fonction f est bornée par M sur I si et seulement si : f est majorée et minorée sur I .
- Remarque : (La fonction f est bornée sur I) $\Leftrightarrow \left(\exists A \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in I : |f(x)| \leq A\right)$.

d. Applications :

❖ f est une fonction tel que son tableau de variation (ci-contre) :

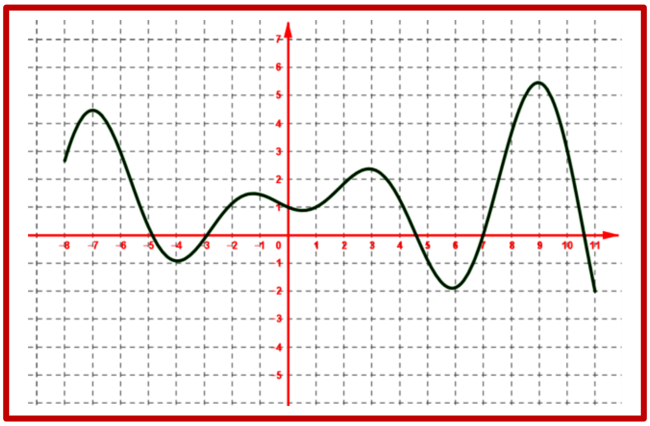
x	-3	0	5	9	$+\infty$
$f(x)$	-1 ↗	7 ↘	-14 ↗	-6 ↘	-12

1. f est elle majorée ? f est elle minorée ? f est elle bornée ? sur $[-3,+\infty[$.
2. Que représente 7 puis -14 pour la fonction f sur $[-3,11]$?
3. Que représente 7 puis -6 pour la fonction f ?

❖ f est une fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $I = [1;+\infty[$.

1. Montrer que : f est majorée par 1 sur I .
2. Montrer que : f est minorée sur I .
3. Est-ce que f est bornée sur I .

❖ La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f

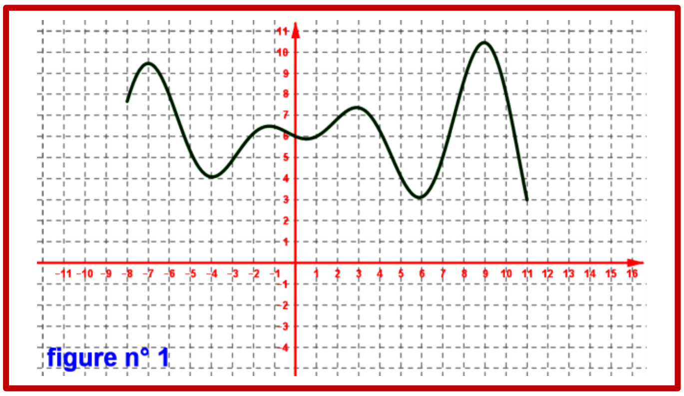


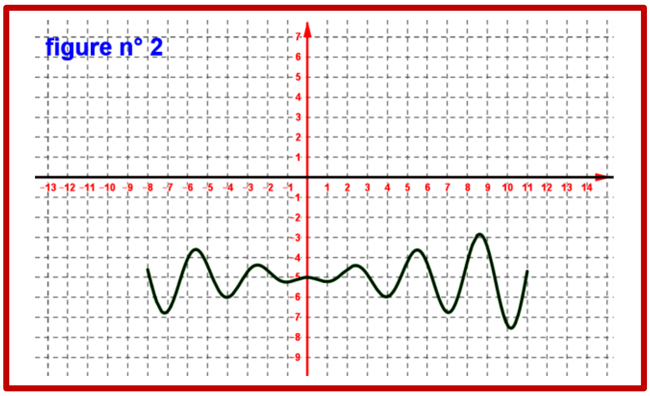
1. Est-ce que f est majorée ? f est minorée ? f est bornée ? sur $[-8,11]$.

IV. Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

A. Fonction positive – fonction négative :

a. Activité :





- La figure n° 1 représente une fonction positive sur $[-8,11]$.
- La figure n° 2 représente une fonction négative sur $[-8,11]$.

1. Quelle remarque peut-on tirer ?
2. Exprimer la remarque on utilise des symboles .

b. Définition :

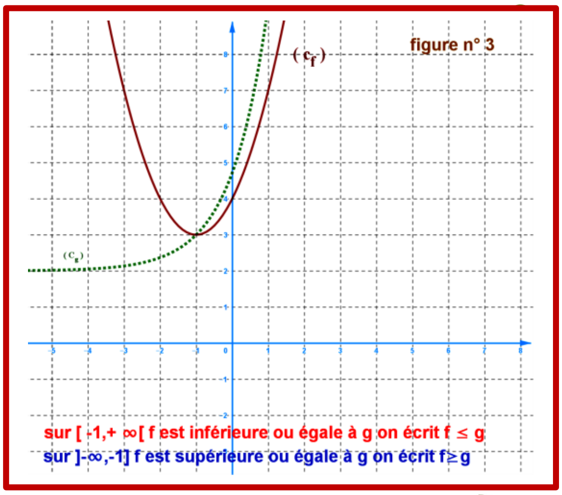
f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

- f est une fonction positive sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$. la courbe (C_f) de f est située au dessus de l'axe des abscisses .
- f est une fonction strictement négative sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) < 0$. la courbe (C_f) de f est située strictement au dessous de l'axe des abscisses .

B. Comparaison de deux fonctions :

a. Activité :

La figure ci-contre n° 3 présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f .



- On dit que : la fonction f est inferieure ou égale à la fonction g sur $[-1,+\infty[$.
- On dit que : la fonction f est strictement supérieure à la fonction g sur $[-1,+\infty[$.

1. Exprimer les propositions présidentes par des symboles .
2. Que peut-on dire pour le cas de la fonction f est égale à g ?

b. Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur I .

- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$.
  la courbe (C_f) de f est située au dessous de la courbe de (C_g) de g sur I .
- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) > g(x))$.
  la courbe (C_f) de f est située strictement au dessue de la courbe de (C_g) de g sur I .
- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$.
  la courbe (C_f) de f et la courbe de (C_g) de g sont confondues sur I .

V. Composée de deux fonctions :

a. Activité :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 + 1$.

1. Déterminer D_f puis D_g .
2. Calculer $f(1)$; $g(5)$; puis écrire $g(5)$ en fonction de f et 1 .
3. Calculer $g(f(3))$ puis $g(f(x))$.

b. Vocabulaire – notation :

- La fonction $h : x \mapsto h(x) = g(f(x))$ on la note par $h = g \circ f$ d'où : $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.
- La fonction $g \circ f$ est appelée la composée de la fonction f et g dans cet ordre .
- Pour $g \circ f$ on considère le diagramme suivant :

$$h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \quad f(x) \in D_g \quad \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)$$

c. Définition :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

On pose : $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$.

La fonction h définie sur D_{gof} par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée de f et g dans cet ordre et on note $h = g \circ f$.

d. Application :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = 2x^2 + 3x$; $g(x) = 5x - 7$.

1. Déterminer D_{gof} puis $D_{f\circ g}$.
2. Calculer : $g \circ f$ puis $f \circ g$.
3. Calculer : $g \circ f(2)$ puis $f \circ g(2)$. que remarquez-vous ?

VI. Monotonie de : $f + c$ et $c.f$ et $f \circ g$ avec c de $\mathbb{R}^*$ - $g \circ f$:

A. Monotonie de : $f + c$ et $c.f$ et $f \circ g$ avec c de $\mathbb{R}^*$.

a. Activité :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur I .

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur I .

1. Déterminer T_h le taux d'accroissement de la fonction $h(x) = f(x) + c$ sur I . (avec $c \in \mathbb{R}$) .
2. Déterminer T_g le taux d'accroissement de la fonction $g(x) = c \times f(x)$ sur I . (avec $c \in \mathbb{R}$) .
3. Donner la propriété obtenue .

Correction :

1. Calculons T_h :

Soient : x et x' de I tel que $x' \neq x$.

On a : $T_h = \dfrac{h(x) - h(x')}{x - x'} = \dfrac{f(x) + c - (f(x') + c)}{x - x'} = \dfrac{f(x) - f(x)}{x - x'} = \dfrac{f(x) - f(x)}{x - x'} = T_f$.

D'où : $T_h = T_{f+c} = T_f$

Conclusion : f et $f + c$ varient dans le même sens sur I (ont même sens de variation sur I) .

1. Calculons T_g :

Soient : x et x' de I tel que $x' \neq x$.

On a : $T_g = \dfrac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \dfrac{c \times f(x) - c \times f(x)}{x - x'} = \dfrac{c \times (f(x) - f(x))}{x - x'} = c \times T_f$ .D'où $T_g = T_{c \times f} = c \times T_f$

Conclusion :

- Si $c > 0$ alors f et $c \times f$ varient dans le même sens sur I .
- Si $c < 0$ alors f et $c \times f$ leurs variations sont opposées sur I .

b. Propriété :

T_f est le taux d'accroissement d'une fonction f sur I et $c \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions f et $f + c$ varient dans le même sens sur I (ont même sens de variation sur I)
- Si $c > 0$ alors f et $c \times f$ varient dans le même sens sur I .
- Si $c < 0$ alors f et $c \times f$ leurs variations sont opposées sur I .

B. Monotonie de : $g\circ f$

a. Activité :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f)\subset D_g$.(c.à.d. $\forall x\in D_f\ ;\ f(x)\in f(D_g)$)

1. Montrer que si f et g varient dans le même sens respectivement sur D_f et $f(D_f)\subset D_g$ alors $g\circ f$ est croissante sur D_f .
2. Montrer que si f et g leurs variations sont opposées respectivement sur D_f et $f(D_f)\subset D_g$ alors $g\circ f$ est strictement décroissante sur D_f .
3. Donner la propriété obtenue .

b. Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f)\subset D_g$.

- si f et g ont même monotonie (strictement monotone) respectivement sur D_f et $f(D_f)\subset D_g$ alors $g\circ f$ est croissante sur D_f ($g\circ f$ est strictement croissante sur D_f) .
- si f et g ont monotonie (strictement monotone) opposées respectivement sur D_f et $f(D_f)\subset D_g$ alors $g\circ f$ est décroissante sur D_f ($g\circ f$ est strictement décroissante sur D_f) .

c. Application :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x)=|x|+5$ et $g(x)=x^2$.

1. Déterminer D_f puis D_g .
2. Etudier la monotonie de f et g .
3. Déterminer la monotonie de $g\circ f$ sur $\mathbb{R}$ à travers un tableau .

VII. Etude et représentation graphique de certain fonctions :

A. Etude et représentation graphique de $x\mapsto ax^2+bx+c$ (polynôme du deuxième degré) .

a. Activité :

f est une fonction définie par : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a et b et c de $\mathbb{R}$ et $a\neq 0$.

On a : $(1)\ :\ f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$.

D'où : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$.

Par suite : $(1)\ \Leftrightarrow\ f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$$\Leftrightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ ;\ (2)\ .$$

1er cas $a>0$:

$$(2) \Rightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0$$

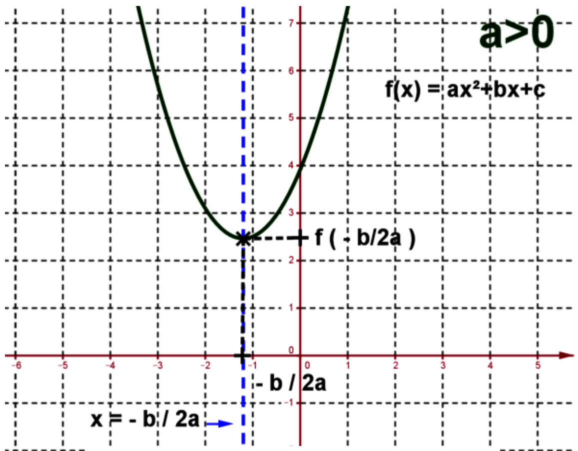
$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) \leq f(x)$$

- **Donc : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur minimale absolue pour f sur $\mathbb{R}$.**
- **Tableau de variation de f est : $a>0$**

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

- **La courbe représentative de f est :**



La courbe s'appelle parabole

❖ **Vocabulaire :**

- $f(x)=ax^2+bx+c$; $a>0$
- **La courbe obtenue est appelée parabole , orienté vers le haut de sommet $S\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.**
- **Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation :**
- (D) : $y=-\frac{b}{2a}$

2^ième^ cas $a<0$:

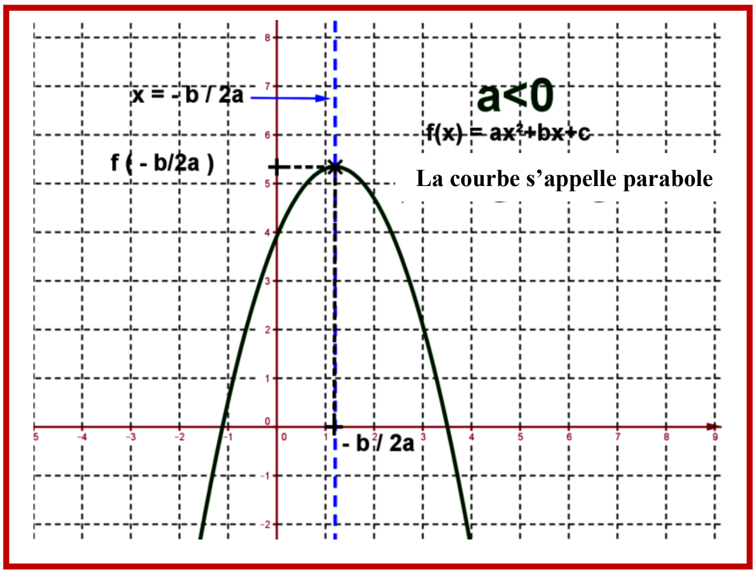
$$(2) \Rightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

- **Donc : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur maximale absolue pour f sur $\mathbb{R}$.**
- **Tableau de variation de f est : $a<0$**

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

- La courbe représentative de f est :



❖ **Vocabulaire :**

- $f(x)=ax^2+bx+c \;\; ; a<0$
- La courbe obtenue est appelée parabole , orienté vers le bas de sommet $S\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : (D) : $y = -\frac{b}{2a}$

b. Application :

❖ f est une fonction définie par : $f(x)=2x^2+4x+3$.

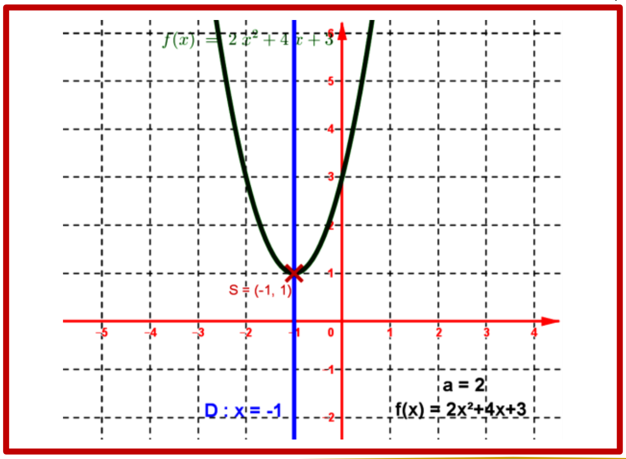
1. Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Correction :

1. Les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .
   - La courbe de f est appelée parabole , orienté vers le haut de sommet $S(-1,1)$.
   - Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : (D) : $y = 2$.
2. Le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(-1)=1$	↗

3. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



❖ f est une fonction définie par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

2. Dresser le tableau de variation de f et Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

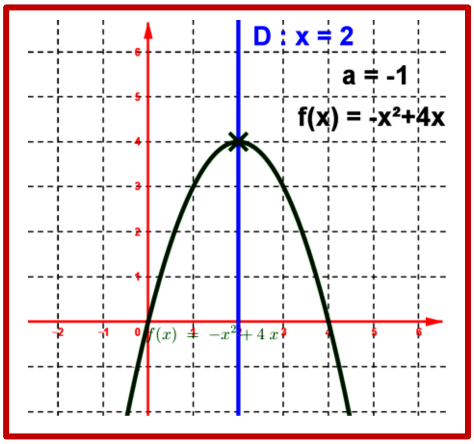
Correction :

1. Les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

- La courbe de f est appelée parabole , orienté vers le bas de sommet $S(2,4)$.
- Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : (D) : y = -1 .

2. Le tableau de variation de f et On construit la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(2) = 4$	↘



B. Etude et représentation graphique de $(a \neq 0)$; $f(x) = ax^3$.

a. Activité :

f est une fonction définie par : $f(x) = ax^3$ avec et $a \neq 0$.

- Ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.(car f est une fonction polynomiale) .
- f est une fonction impaire car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(-x)^3 = -ax^3 = f(x)$.
- Ensemble d'étude est : $D_E = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.
- La monotonie de f : soient x et x' de D_E tel que $x < x'$ on a (1) : $x < x' \Rightarrow x^3 < (x')^3$

1[er] cas $a > 0$:

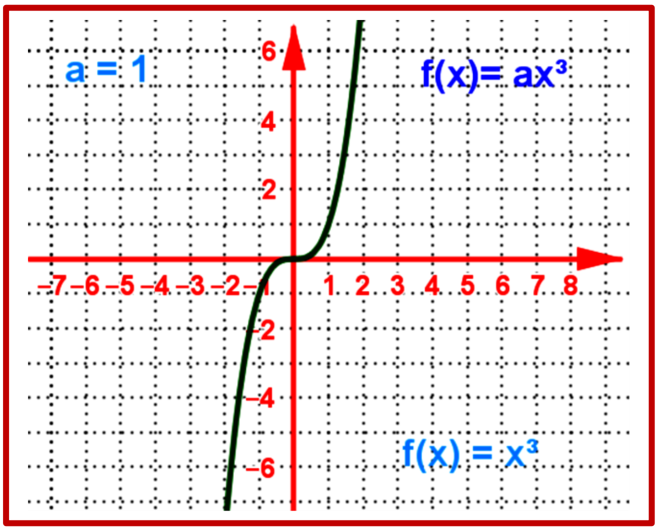
$$(1) \Rightarrow ax^3 < a(x')^3$$
$$\Rightarrow f(x) < f(x')$$

D'où f est strictement croissante sur $D_E = \mathbb{R}^*$

et aussi sur $\mathbb{R}^-$ car la fonction est impaire .

- Le tableau de variation de f
et la courbe représentative de f est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	0	↗



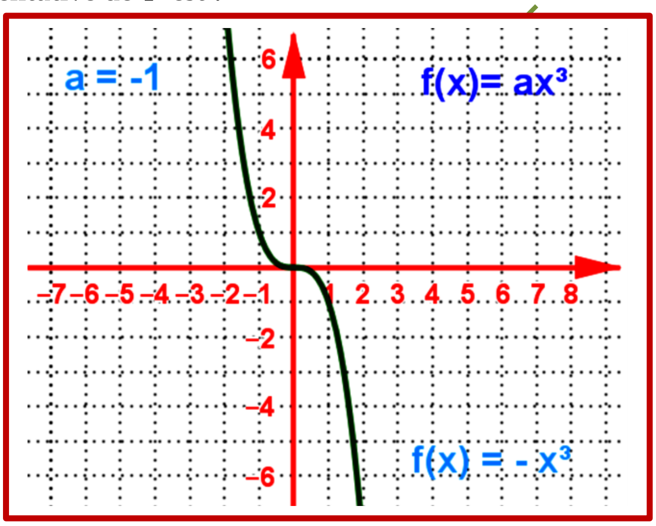
1^{er} cas $a<0$:

$$(1) \Rightarrow ax^3 > a(x')^3$$
$$\Rightarrow f(x) > f(x')$$

D'où f est strictement décroissante sur $D_E = \mathbb{R}^*$ et aussi sur $\mathbb{R}^-$ car la fonction est impaire .

- Le tableau de variation de f et la courbe représentative de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$



b. Application :

❖ f est une fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{2}x^3$.

1. Dresser le tableau de variation de f .

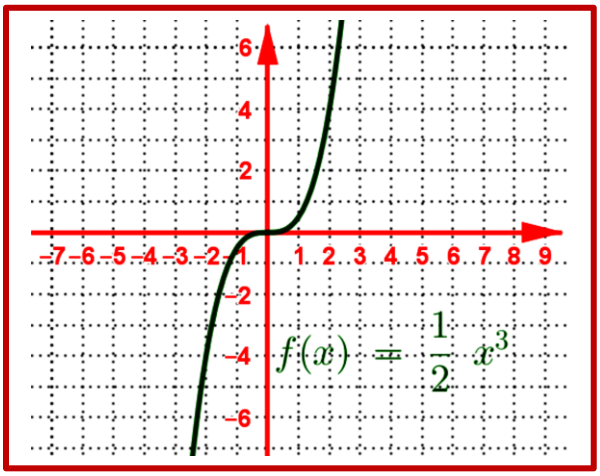
2. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Correction :

1. Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

2. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



❖ f est une fonction définie par : $f(x)=-\frac{2}{3}x^3$.

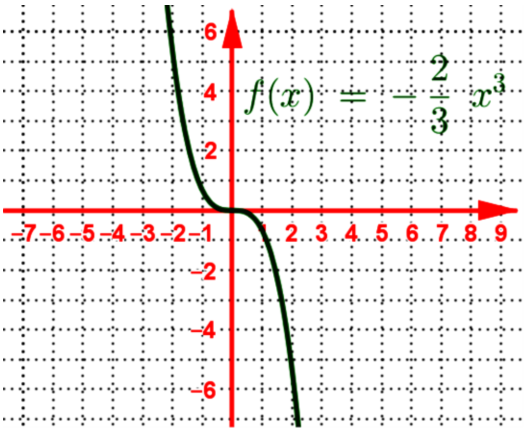
1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Correction :

1. Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↘

2. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



C. Etude et représentation graphique de la fonction homographique : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $(c\neq 0)$.

- **Ensemble de définition :**

On a : $x\in D_f \Leftrightarrow cx+d\neq 0$

$$\Leftrightarrow x\neq -\frac{d}{c}$$

D'où : $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}=\left]-\infty,-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$.

- **La monotonie de f : soient x et x' de D_E tel que $x\neq x'$.**

on a :

$$T_f=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\quad ;(x\neq x')$$

$$=\frac{\dfrac{ax+b}{cx+d}-\dfrac{ax'+b}{cx'+d}}{x-x'}$$

$$=\frac{\dfrac{(ax+b)(cx'+d)-(ax'+b)(cx+d)}{(cx+d)(cx'+d)}}{x-x'}$$

$$=\frac{adx+bcx'-adx'-bcx}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{x(ad-bc)-x'(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{(ad-bc)\cancel{(x-x')}}{(cx+d)(cx'+d)\cancel{(x-x')}} = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)} = \frac{\Delta}{(cx+d)(cx'+d)} \ ; \left(\Delta = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)$$

- On a le signe de $(cx+d)(cx'+d)>0$ sur $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$ et de même sur $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$.

D'où le signe de T_f est le signe de $\Delta = ad-bc$ donc la monotonie de f sur $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$ et de même sur $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ dépend du signe de $\Delta = ad-bc$.

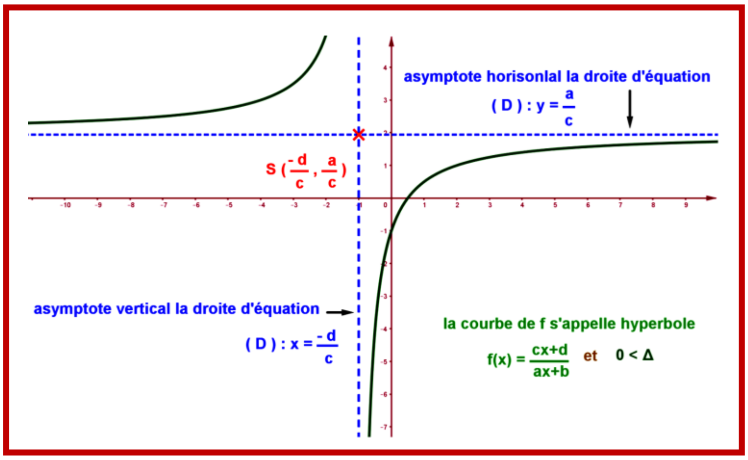
1[er] cas $\Delta = ad-bc>0$: donc $T_f>0$.

- D'où f est strictement croissante sur $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$ et aussi sur $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$.
- Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$

$\Delta>0$

- La courbe représentative de f est :



❖ Vocabulaire :

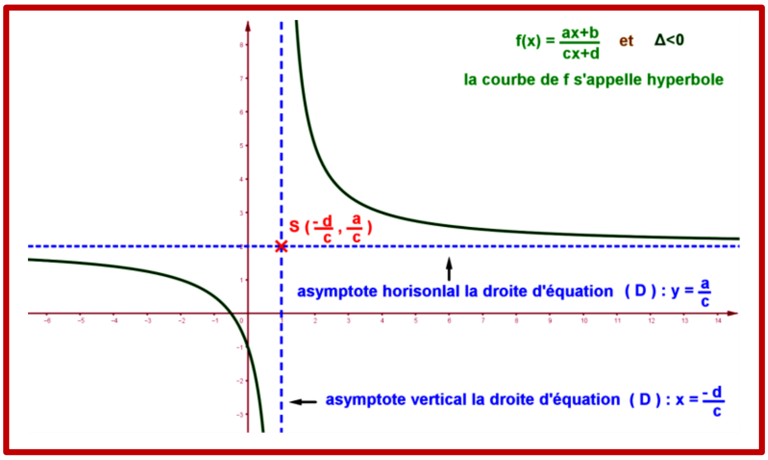
- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; $(c \neq 0)$; $\Delta = ad-bc>0$
- La courbe obtenue est appelée hyperbole .
- Son centre de symétrie est $\Omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$.
- Asymptote verticale est la droite (D) d'équation : $D_v : x = -\frac{d}{c}$.
- Asymptote horizontale est la droite (D) d'équation : $D_h : y = \frac{a}{c}$

2[ième] cas $\Delta = ad-bc<0$: donc $T_f<0$.

- D'où f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$ et aussi sur $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$.
- Le tableau de variation de f est :

$\Delta<0$	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
	$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

- La courbe représentative de f est



❖ **Vocabulaire :**

- $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $(c\neq 0)$; $\Delta=ad-bc<0$
- La courbe obtenue est appelée hyperbole .
- Son centre de symétrie est $\Omega\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.
- Asymptote verticale est la droite (D) d'équation : $D_v : x=-\dfrac{d}{c}$.
- Asymptote horizontale est la droite (D) d'équation : $D_h : y=\dfrac{a}{c}$

c. Application :

❖ f est une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Correction :

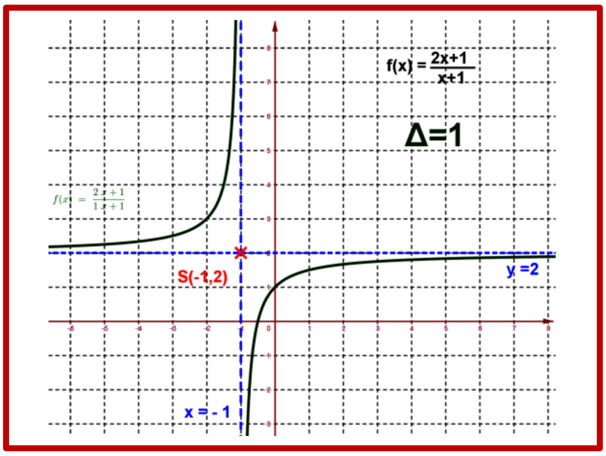
1. Les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

- On a $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\times1-1\times1=1>0$
- La courbe de f est un hyperbole .
- Son centre de symétrie est $\Omega\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)=\Omega(-1,2)$.
- Asymptote verticale est la droite (D_v) d'équation : $D_v : x=-\dfrac{d}{c}=-1$.
- Asymptote horizontale est la droite (D_h) d'équation : $D_h : y=\dfrac{a}{c}=2$.
-

2. Le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}=-1$	$+\infty$
f	↗	‖	↗

$\Delta>0$

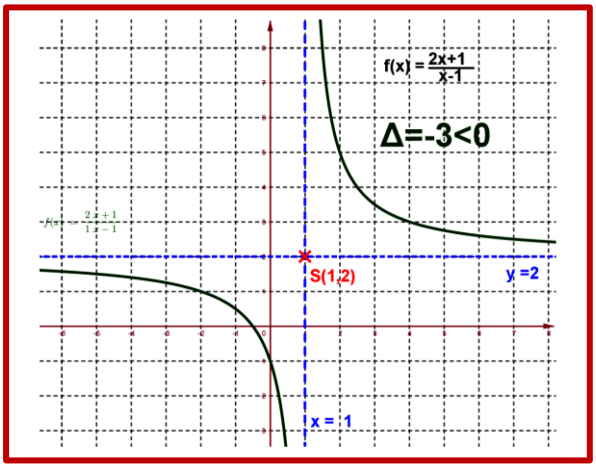


3. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- f est une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{d}{c}=1$ $\qquad +\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖ $\searrow$

$\Delta<0$



D. Etude et représentation graphique de la fonction $f(x)=\sqrt{x+a}$:

- f est définie sur $D_f=[-a,+\infty[$.
- Monotonie de f sur $D_f=[-a,+\infty[$.

soient x et x' de $D_f=[-a,+\infty[$ tel que $x<x'$.

on a :

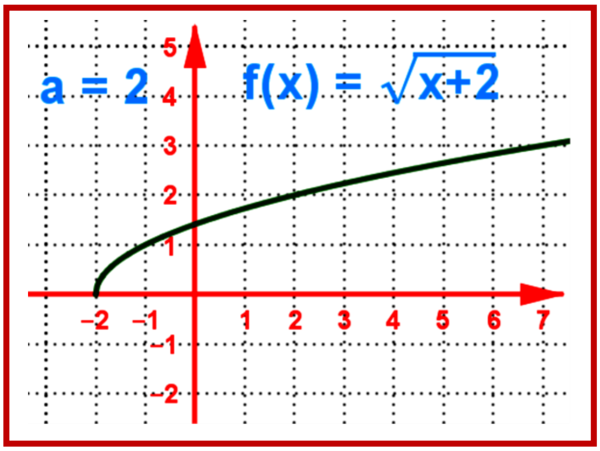
$$x<x' \Rightarrow 0\le x+a< x'+a$$
$$\Rightarrow 0\le \sqrt{x+a}<\sqrt{x'+a}$$
$$\Rightarrow 0\le f(x)<f(x')$$

D'où f est strictement croissante sur $D_f=[-a,+\infty[$.

- Le tableau de variation de f .

x	$-a$ $\qquad +\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

- La courbe représentative de f est :



Cas : $f(x)=\sqrt{a-x}$

- f est définie sur $D_f=]-\infty,a]$.
- Monotonie de f sur $D_f=]-\infty,a]$.

soient x et x' de $D_f=]-\infty,a]$ tel que $x<x'$.

on a : $x<x'\le a \Rightarrow -a\le -x<-x'$

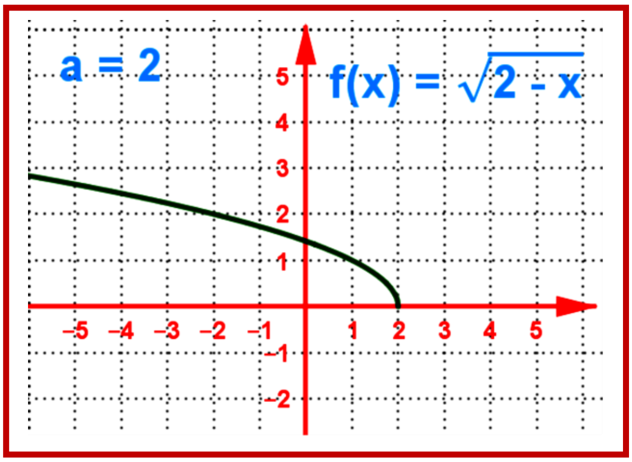
$$\Rightarrow 0\le -x+a< -x'+a$$
$$\Rightarrow 0\le \sqrt{x+a}<\sqrt{x'+a}$$
$$\Rightarrow 0\le f(x)<f(x')$$

D'où f est strictement décroissante sur $D_f=]-\infty,a]$.

- Le tableau de variation de f .

x	$-\infty$ $\quad$ a
$f(x)$	0 ↘

- La courbe représentative de f est :



A. Fonction la partie entière $f(x)=E(x)$

a. Activité :

Soit x de $\mathbb{R}$. Compléter le tableau suivant on détermine le nombre entier relatif p $(p\in\mathbb{Z})$ tel que $p\le x<p+1$

x	…..	4,55	0,78	−0,78	−4,55	…..
p						

b. Vocabulaire :

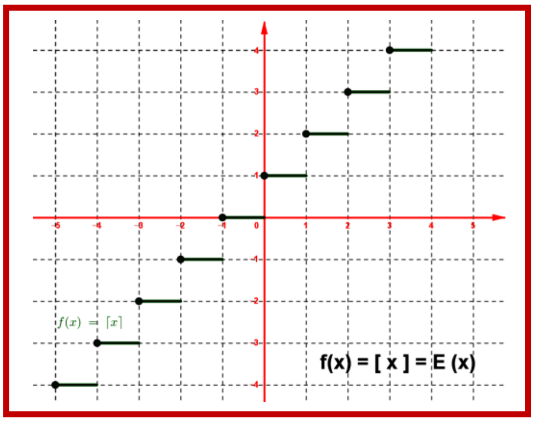
Le nombre entier relatif s'appelle la partie entière relative du nombre réel x , on note $p=E(x)$ ou encore $p=[x]$.

c. Définition :

Soit x de $\mathbb{R}$.
Le nombre entier relatif p qui vérifie $p\le x<p+1$ s'appelle la partie entière relative du nombre réel x , on note $p=E(x)$ ou encore $p=[x]$.
Donc : $E(x)\le x<E(x)+1$

d. Propriété :

- $\forall x\in I_p=[p,p+1[\ : f(x)=[x]=E(x)=p$.
- $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow E(x)=x$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ E(x)\le x<E(x)+1$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z} : E(x+k)=E(x)+k$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x-1<E(x)\le x$.
- La courbe représentative de f est :



e. Application :

❖ f est une fonction définie par : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=2x-E(x)$

1. On considère les intervalles I_k tel que $I_k=[k,k+1[$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

- Détermine $f(x)$ tel que $x\in I_k$.
- Construire C_0 la courbe de f sur $I_0=[0,1[$. puis Construire C_k la courbe de f sur $I_k=[k,k+1[$.