

## Planche n° 8. Généralités sur les fonctions : corrigé

### Exercice n° 1

1)  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel  $x$

$$f_1(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 = 3x^4 - 5x^2 + 1 = f_1(x).$$

La fonction  $f_1$  est paire.

2)  $f_2$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f_2(-x) = \frac{(-x)^5 - (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^5 - x}{x^2 - 1} = -f_2(x).$$

La fonction  $f_2$  est impaire.

3)  $f_3(-1)$  existe mais  $f_3(-1)$  n'existe pas. Le domaine de définition de la fonction  $f_3$  n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc, la fonction  $f_3$  n'est ni paire, ni impaire.

4) Pour tout réel  $x$ ,  $e^x + 1 > 1$ , en particulier pour tout réel  $x$ ,  $e^x + 1 \neq 0$ .  $f_4$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

$$f_4(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f_4(x).$$

La fonction  $f_4$  est impaire.

5)  $f_2$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$f_5(-x) = \cos(-2x) + \tan^2(-x) = \cos(2x) + \tan^2(x) = f_5(x).$$

La fonction  $f_5$  est paire.

6)  $f_2$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

$$f_6(-x) = \sin(-x) - (-x) = -(\sin(x) - x) = -f_6(x).$$

La fonction  $f_6$  est impaire.

7) Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \geq 0$ . Donc  $f_7$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

$$f_7(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f_7(x).$$

La fonction  $f_7$  est paire.

8) On ne peut pas déterminer le domaine de définition de la fonction  $f_8$ . Mais comme  $(-x)^6 - (-x)^4 - 31(-x)^2 + 3 = x^6 - x^4 - 31x^2 + 3$ , pour tout réel  $x$ ,  $f_8(-x)$  existe si et seulement si  $f_8(x)$  existe. Donc  $f_8$  est définie sur un domaine  $D$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout  $x$  de  $D$

$$f_8(-x) = \frac{-x}{(-x)^6 - (-x)^4 - 31(-x)^2 + 3} = -\frac{x}{x^6 - x^4 - 31x^2 + 3} = -f_8(x).$$

La fonction  $f_8$  est impaire.

9)  $f_9(0) = 1 \neq 0$  et donc  $f_9$  n'est pas impaire.  $f_9\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 1 = f_9\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Donc,  $f_9$  n'est pas paire.

La fonction  $f_9$  n'est ni paire, ni impaire.

### Exercice n° 2

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Unicité.** Supposons qu'il existe deux fonctions  $g$  et  $h$  telles que  $g$  est paire,  $h$  est impaire et  $f = g + h$ . Nécessairement pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases} .$$

En additionnant et en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient pour tout réel  $x$

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Ceci montre l'unicité d'un couple  $(g, h)$  tel que  $g$  est paire,  $h$  est impaire et  $f = g + h$ .

**Existence.** Réciproquement, posons pour tout réel  $x$

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

- Pour tout réel  $x$ ,  $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$  et donc  $f = g + h$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$  et donc la fonction  $g$  est paire.
- Pour tout réel  $x$ ,  $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x)$  et donc la fonction  $h$  est impaire.

Ainsi, les fonctions  $g$  et  $h$  conviennent ce qui montre l'existence d'un couple  $(g, h)$  tel que  $g$  est paire,  $h$  est impaire et  $f = g + h$ .

### Exercice n° 3

Soit  $n$  un entier naturel. Supposons que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ , posons  $g(x) = f(-x)$ . Alors  $g$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$g^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x).$$

Si de plus  $f$  est paire, alors  $g = f$  et donc pour tout réel  $x$ ,  $f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$  ou encore

$$\text{pour tout réel } x, f^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Si  $n$  est un entier pair, posons  $n = 2p$  où  $p$  est un entier. L'égalité précédente s'écrit

$$\text{pour tout réel } x, f^{(2p)}(-x) = f^{(2p)}(x)$$

et donc  $f^{(2p)}$  est paire. Ainsi, les fonctions  $f, f'', f^{(4)}, f^{(6)} \dots$  sont paires.

Si  $n$  est un entier impair, posons  $n = 2p + 1$  où  $p$  est un entier. L'égalité précédente s'écrit

$$\text{pour tout réel } x, f^{(2p+1)}(-x) = -f^{(2p+1)}(x)$$

et donc  $f^{(2p+1)}$  est impaire. Ainsi, les fonctions  $f', f^{(3)}, f^{(5)} \dots$  sont impaires. On résume ces résultats en disant que

$$\text{si } f \text{ est paire, } f^{(n)} \text{ a la parité de } n.$$

Si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire et on peut lui appliquer les résultats précédents. Donc,

$$\text{si } f \text{ est impaire, } f^{(n)} \text{ a la parité contraire de celle de } n.$$

Une primitive de fonction impaire est automatiquement une fonction paire. Démontrons-le.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et impaire. Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Pour tout réel  $x$ , posons  $G(x) = F(x) - F(-x)$ .  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$

$$G'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

Donc, la fonction  $G$  est constante sur  $\mathbb{R}$  puis, pour tout réel  $x$ ,

$$G(x) = G(0) = F(0) - F(0) = 0.$$

On en déduit que pour tout réel  $x$ ,  $F(-x) = F(x)$  et donc que  $F$  est paire.

Le résultat analogue est faux si on suppose que  $f$  est paire car une fonction constante est paire. Voici une succession de primitives pour exemple :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x + 4, \quad x \mapsto \frac{x^2}{2} + 4x - 5, \quad x \mapsto \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \dots$$

**Exercice n° 4**

1) La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique par rapport à  $\frac{3}{2}$ . De plus, pour tout réel  $x$ ,

$$f(3-x) = (3-x)^2 - 3(3-x) + 2 = x^2 - 3x + 2 = f(x).$$

Donc, la droite d'équation  $x = \frac{3}{2}$  est un axe de symétrie du graphe dans un repère orthonormé de la fonction  $f$ .

2) La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  qui est symétrique par rapport à 1. De plus, pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(2x_1 - x) + f(x) = \frac{2(2-x) + 1}{(2-x) - 1} + \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2x - 5}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{4x - 4}{x - 1} = \frac{4(x - 1)}{x - 1} = 4 = 2y_1.$$

Donc, le point I de coordonnées (1, 2) est centre de symétrie du graphe de la fonction  $f$ .

3) La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel  $x$ ,

$$f(2x_1 - x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} x - 1 = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1 = 2y_1.$$

Donc, le point I de coordonnées  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  est centre de symétrie du graphe de la fonction  $f$ .

4) • La fonction  $f$  est paire et donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de  $f$ . Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) + \cos(6k\pi - 3x) = \cos(-x) + \cos(-3x) = \cos(x) + \cos(3x) = f(x).$$

On en déduit que pour tout entier relatif  $k$ , la droite d'équation  $x = k\pi$  est un axe de symétrie du graphe de  $f$ .

• Pour tout réel  $x$ ,

$$f(\pi - x) = \cos(\pi - x) + \cos(3\pi - 3x) = \cos(\pi - x) + \cos(\pi - 3x) = -\cos(x) - \cos(3x) = -f(x),$$

et donc pour tout réel  $x$ ,  $f(\pi - x) + f(x) = 0$ . On en déduit que le point de coordonnées  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  est un centre de symétrie du graphe de  $f$ . Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ , le point de coordonnées  $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$  est un centre de symétrie du graphe de  $f$ .

**Exercice n° 5**

Chacune des fonctions considérées est définie sur  $\mathbb{R}$ .

1) Pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x + 1) = E(x + 1) - (x + 1) = E(x) + 1 - x - 1 = E(x) - x = f_1(x)$  et donc la fonction  $f_1$  est 1-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ ,  $f_1$  est  $k$ -périodique.

2) Pour tout réel  $x$ ,  $f_2\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x + 1) - (2x + 1) = E(2x) - 2x = f_2(x)$  et donc la fonction  $f_2$  est  $\frac{1}{2}$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ ,  $f_2$  est  $\frac{k}{2}$ -périodique.

3) Pour tout réel  $x$ ,  $f_3(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) - \sin(4x + 4\pi) = \cos(2x) - \sin(4x) = f_3(x)$  et donc la fonction  $f_3$  est  $\pi$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ ,  $f_3$  est  $k\pi$ -périodique.

4) Pour tout réel  $x$ ,  $f_4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x + 2\pi) = \cos(4x) = f_4(x)$  et donc la fonction  $f_4$  est  $\frac{\pi}{2}$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ ,  $f_4$  est  $\frac{k\pi}{2}$ -périodique.

5) Pour tout réel  $x$ ,  $f_5\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = f_5(x)$  et donc la fonction  $f_5$  est  $\frac{4\pi}{3}$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ ,  $f_5$  est  $\frac{4k\pi}{3}$ -périodique.

6) Pour tout réel  $x$ ,  $f_6\left(x + 3\pi\right) = \cos\left(\frac{2x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2x}{3}\right) = f_6(x)$  et donc la fonction  $f_6$  est  $3\pi$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif  $k$ ,  $f_6$  est  $3k\pi$ -périodique.

**Exercice n° 6**

Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 > 1$  et en particulier, pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \neq 0$ . Donc, les deux fonctions sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

1) Pour tout réel  $x$ ,

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Donc, pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq f(x) \leq 1$ . La fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2) Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} (|x| - 1)^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{x^2 + 1} \\ &\Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel  $x$ ,  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ . La fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n° 7**

1) Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = k(h(g(x)))$  où  $g : x \mapsto x + 1$ ,  $h : y \mapsto y^2$  et  $k : z \mapsto -z + 1$ .

La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[-1, +\infty[$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , la fonction  $h$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et la fonction  $k$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[-1, +\infty[$ .

La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]-\infty, -1]$  à valeurs dans  $]-\infty, 0]$ , la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, 0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et la fonction  $k$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty, -1]$ .

2) Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = k(h(g(x)))$  où  $g : x \mapsto 2x + 1$ ,  $h : y \mapsto \frac{1}{y}$  et  $k : z \mapsto 3 - 5z$ .

La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]-\infty, \frac{1}{2}[$  à valeurs dans  $]-\infty, 0[$ , la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, 0[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et la fonction  $k$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty, \frac{1}{2}[$ .

3) La fonction  $x \mapsto 1 + e^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et la fonction  $X \mapsto \ln X$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Donc,  $x \mapsto$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4) La fonction  $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et paire.

La fonction  $x \mapsto \ln x$  est croissante et négative sur  $]0, 1]$ . Donc, la fonction  $x \mapsto 1 + \ln^2 x$  est décroissante et strictement positive sur  $]0, 1]$ . Par suite, la fonction  $x \mapsto 1 - \frac{1}{\ln^2 x + 1}$  est décroissante sur  $]0, 1]$  et enfin, la fonction  $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$  est décroissante sur  $]0, 1]$ . De même, la fonction  $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ . Par parité, la fonction  $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$  est décroissante sur  $]-\infty, -1]$  et croissante sur  $[-1, 0[$ .

5) Soient  $x$  et  $x'$  deux réels tels que  $x \leq x'$ . Alors, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[x, x']$ ,  $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$  et donc,  $f_5(x') - f_5(x) = \int_x^{x'} \frac{1}{1+t^2} dt \geq 0$  (par positivité de l'intégrale).  $f_5$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

6) Soient  $x$  et  $x'$  deux réels tels que  $x \leq x'$ . Alors, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , on a  $xt \leq x't$ , puis pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ ,  $e^{xt} \leq e^{x't}$ . Par croissance de l'intégrale, on a alors  $f_6(x) \leq f_6(x')$ .  $f_6$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n° 8**

1) La fonction  $x \mapsto \sin x$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . La fonction  $x \mapsto \cos x$  est strictement décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et donc la fonction  $x \mapsto -\cos x$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .  $f_1$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

2) Les deux fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \ln x$  sont croissantes et positives sur  $[1, +\infty[$ . Donc,  $f_2$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  en tant que produit de fonctions croissantes et positives sur  $[1, +\infty[$ .

3)  $f_3$  est paire.  $x \mapsto \frac{\pi}{2(x^2 + 1)}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et la fonction  $X \mapsto \cos X$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Donc, la fonction  $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2(x^2 + 1)}\right)$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , et de plus positive sur  $\mathbb{R}^+$ .  $f_3$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  en tant que produit de fonctions croissantes et positives sur  $\mathbb{R}^+$ . Par parité,  $f_3$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^-$ .

4)  $2 \times (-1) - 1 \times (3) = -5 < 0$ . Donc,  $f_4$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 1[$  et strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

5)  $f_5$  est paire. La fonction  $x \mapsto x^4$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Puisque  $1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 > 0$ , la fonction  $X \mapsto \frac{X-1}{X+1}$  est croissante sur  $] -1, +\infty[$  et en particulier sur  $\mathbb{R}^+$ .  $f_5$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Par parité,  $f_5$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^-$ .

6) Les fonctions  $x \mapsto -x^7$  et  $x \mapsto x^4 + x^2 + 3$  sont strictement décroissantes sur  $] -\infty, 0[$ . Donc,  $f_6$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0[$  en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur  $] -\infty, 0[$ .

### Exercice n° 9

1) Si  $1 \leq x \leq 2$ ,  $3 \leq 2x + 1 \leq 5$  et  $0 < 7 \leq 4x + 3 \leq 11$ . Par suite,  $0 < 3 \leq 2x + 1 \leq 5$  et  $0 < \frac{1}{11} \leq \frac{1}{4x + 3} \leq \frac{1}{7}$ , puis  $\frac{3}{11} \leq \frac{2x + 1}{4x + 3} \leq \frac{5}{7}$ .

2)  $\frac{2x + 1}{4x + 3} = \frac{3}{11} \Leftrightarrow 11(2x + 1) = 3(4x + 3) \Leftrightarrow 10x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$ . La solution obtenue n'est pas dans l'intervalle  $[1, 2]$ , ou encore l'équation  $\frac{2x + 1}{4x + 3} = \frac{3}{11}$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $[1, 2]$ . Ceci signifie que l'encadrement fourni au 1) est trop large et peut donc sûrement être amélioré.

3) Puisque  $2 \times 3 - 1 \times 4 = 2 > 0$ , la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x + 1}{4x + 3}$  est croissante sur  $[1, 2]$ . Par suite, si  $x \in [1, 2]$ ,

$$\frac{3}{7} = f(1) \leq \frac{2x + 1}{4x + 3} = f(x) \leq f(2) = \frac{5}{11}.$$

### Exercice n° 10

1)  $f_1$  est décroissante sur  $[-1, 0]$  et croissante sur  $[0, 2]$ .  $f_1$  admet donc un minimum égal à  $f_1(0) = 0$  et un maximum égal à  $\text{Max}\{f_1(-1), f_1(2)\} = 4$ . Pour  $x \in [-1, 2]$ ,  $0 \leq x^2 \leq 4$ .

2) Pour  $x \in [0, 4]$ ,  $-\frac{1}{4} = f_2\left(\frac{3}{2}\right) \leq f_2(x) \leq f_2(4) = 6$ .

3)  $f_3$  est décroissante sur  $[-2, -1]$ . Donc, pour  $x \in [-2, -1]$ ,  $f_2(-1) \leq f_2(x) \leq f_2(-2)$ , ou encore  $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$ .

4)  $f_4$  est paire, décroissante sur  $]0, 1[$ .  $f_4$  n'est pas majorée sur  $]0, 1[$  et admet un minimum égal à  $f_4(1) = 1$ . Pour  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ ,  $\frac{1}{x^2} \geq 1$ .

5)  $f_5$  est décroissante sur  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ . Pour  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ ,  $-1 = \cos \pi \leq \cos x \leq \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

6)  $f_6$  est dérivable sur  $[0, 4]$  (car  $-\frac{2}{13} \notin [0, 4]$ ) et pour  $x \in [0, 4]$ ,  $f'_6(x) = \frac{5 \times 2 - 13 \times 1}{(13x + 2)^2} = -\frac{3}{(13x + 2)^2} < 0$ .  $f_6$  est donc décroissante sur  $[0, 4]$  et pour  $x \in [0, 4]$ ,  $\frac{7}{18} = f_6(4) \leq f_6(x) = \frac{5x + 1}{13x + 2} \leq f_6(0) = \frac{1}{2}$ .

7) Pour  $x \neq \frac{9}{2}$ , posons  $f_7(x) = \frac{2x + 3}{2x - 9}$ . Puisque  $2 \times (-9) - 3 \times 2 < 0$ ,  $f_7$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{9}{2}\right[$  et aussi sur  $\left]\frac{9}{2}, +\infty\right[$ . Par suite, pour  $n \geq 5$ ,  $1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p + 3}{2p - 9} \leq \frac{2n + 3}{2n - 9} \leq \frac{2 \times 5 + 3}{2 \times 5 - 9} = 13$  et pour  $0 \leq n \leq 4$ ,  $-11 = \frac{2 \times 4 + 3}{2 \times 4 - 9} \leq \frac{2n + 3}{2n - 9} \leq \frac{2 \times 0 + 3}{2 \times 0 - 9} = -\frac{1}{3}$ . La plus petite valeur de  $\frac{2n + 3}{2n - 9}$  est  $-11$  (obtenue pour  $n = 4$ ) et la plus grande valeur de  $\frac{2n + 3}{2n - 9}$  est  $13$  (obtenue pour  $n = 5$ ).

8) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{4n+1}{3n+7} = \frac{\frac{4}{3}(3n+7) - \frac{28}{3} + 1}{3n+7} = \frac{4}{3} - \frac{25}{9(n+\frac{7}{3})}$ . La suite  $\left(\frac{4n+1}{3n+7}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc croissante. On en déduit

que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{7} \leq \frac{4n+1}{3n+7} < \frac{4}{3}$ .

**Exercice n° 11**

1) Soit  $x \in [1, 3]$ .  $(2x^2 - 5x + 3) - (3x - 3) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3) \leq 0$ . Donc, pour  $x \in [1, 3]$ ,  $2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$ .

2) Pour  $x \geq 1$ ,  $\frac{2x^2 - 7x + 1}{x+3} \leq \frac{2x^2 + 7x + 1}{x+3} \leq \frac{2x^2 + 7x^2 + x^2}{x} = 10x$ .

3) Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  et donc  $\sqrt{x^2 - x + 1}$  existe pour tout réel  $x$ . De plus, pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 - x + 1} > 0$ .

Pour  $x \leq 0$ ,  $\sqrt{x^2 - x + 1} - x > 0$  et donc  $\sqrt{x^2 - x + 1} + x$  a le même signe que

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right) \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) = -x + 1 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout réel  $x \leq 0$ ,  $\sqrt{x^2 - x + 1} + x \geq 0$  et donc pour tout réel  $x \leq 0$ ,  $\sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x$ .

**Exercice n° 12**

Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \geq 0$  et donc, pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1}$  existe. Ensuite, pour tout réel  $x$ ,

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|.$$

Par suite, pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x$  et donc  $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$  et aussi, pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq -x$  et donc  $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$ .

**Exercice n° 13**

1) Pour  $x \geq 0$ , posons  $f(x) = \sin x - x$ .  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et pour  $x \geq 0$ , on a  $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ .  $f$  est donc décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Mais  $f(0) = 0$  et  $f$  est négative sur  $[0, +\infty[$  ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

**Commentaire.** La démonstration précédente ne tient pas debout car la formule  $(\sin)' = \cos$  a été établie en sachant que pour  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\sin(x) \leq x$ . Néanmoins, c'est ce qui est attendu dans la pratique (et il se trouve qu'on est capable de démontrer que  $(\sin)' = \cos$  sans utiliser l'inégalité  $\sin(x) \leq x$ ).

2) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = e^x - 1 - x$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = e^x - 1$ .  $f'$  est négative sur  $\mathbb{R}^-$  et positive sur  $\mathbb{R}^+$ .  $f$  admet donc un minimum en 0 égal à  $f(0) = 0$ .  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}$  ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

3) Pour  $x > -1$ , posons  $f(x) = \ln(1+x) - x$ .  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et pour  $x > -1$ , on a  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$ .  $f'$  est positive sur  $] -1, 0]$  et négative sur  $\mathbb{R}^+$ .  $f$  admet donc un maximum en 0 égal à  $f(0) = 0$ . On en déduit que  $f$  est négative sur  $] -1, +\infty[$  ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.