ENSEMBLES ET APPLICATIONS

A) les Ensembles

1) vocabulaires

• Un ensemble E est une collection d'objets mathématiques. Les objets que l'ensemble Contient sont appelés éléments

• Si x est un élément de E on dit que x appartient à E et on écrit : $x \in E$

• $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :$\{x \in E \text{ et } x \notin E\}$.

• Un ensemble peut être défini
  - En extension, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.
  - En compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

Exemples : L'ensemble des diviseurs de 3 en extension est : $D_3 = \{1;3\}$

L'ensemble des diviseurs de 3 en compréhension est : $D_3 = \{n \in \mathbb{N} /\ n/3\}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

a) On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$

$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

b) Soient E et F deux ensembles quelconques.
E est dit inclus dans F si tout élément de E est un élément de F. On note $E \subset F$

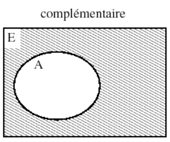
$(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.

c): Soit E un ensemble, les partie de E, constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des partie de E et se note $P(E)$ et on a $P(E)) = \{X/ X \subset E\}$

d) $A \subseteq E \Leftrightarrow A \in P(E)$ $\quad \emptyset \in P(E)$ et $\emptyset \subset E$

$E \in P(E)$ et $E \subset E$

e) Soit $A \subseteq E$: le complémentaire de A on le note $\overline{A}$ ou



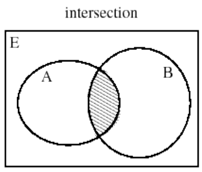
C_E^A. $\quad \overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

Et on a : $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = E$

$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = I$ (Ensembles des irrationnelles).

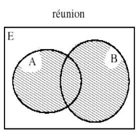
3) Intersection ; réunion, différence de deux Ensembles.

a) Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; l'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note par $A \cap B$.



$A \cap B = \{x \in E/ x \in A \textbf{ et } x \in B\}$

b) la réunion de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On le note par $A \cup B$.



$A \cup B = \{x \in E/ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$

c) la différence de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. On le note par $A \backslash B$ ou $A - B$

$A \backslash B = \{x \in E/ x \in A \textbf{ et } x \notin B\}$

4) Propriétés :

Soient E, un ensemble, A, B et C des parties de E.

$(A = B) \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

$A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow (A \subset C)$ la transitivité

$A \cap A = A$ et $A \cup A = A$

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$A \cap B \subset A \subset A \cup B$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ L'associativité

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ L'associativité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ la distributivité

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ la distributivité

$\overline{A} = E/A$ et $\overline{\overline{A}} = A$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ lois de Morgan

$(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

$A - B = A - (A \cap B)$ $\qquad A - B = A \cap \overline{B}$

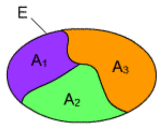
5) Notations généralisées.

a)Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$ une famille de parties d'un ensemble E, (qu'on peut noter $(Ai)1 \leq i \leq n$)

L'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

L'ensemble $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

b) Une famille $(Ai)1 \leq i \leq n$ de parties d'un ensemble E s'appelle une partition de l'ensemble E si elle vérifie



$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $i \neq j) \Rightarrow (Ai \cap Aj = \emptyset)$

On dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

B) LES APPLICATIONS

1) Application Définition : Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F. **Vocabulaire :** $f : E \to F$

$x \mapsto y = f(x)$

a) L'ensemble E s'appelle ensemble de départ de l'application f.

b) L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée de l'application f.

c)$y = f(x)$ s'appelle l'image de x par l'application f.

d) x s'appelle l'antécédent de y par l'application f.

2) Egalité de deux applications

On dit que deux applications f et g sont égales si :

1) Elles ont le même ensemble de départ E

2) Elles ont le même ensemble d'arrivée F

3) $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$.

3)Définition :(injection) Soit f une application de E dans F, on dit que f est injective de E dans F si :

$$\forall (x_1;x_2) \in E^2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Par contraposition on peut dire que :

($\boldsymbol{f}$ est injective) $\Leftrightarrow \forall (x_1;x_2) \in E^2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

4)Définition :(surjection) Soit f une application de E dans F, on dit que f est surjective de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E.

$(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F})(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E.

5) a) Définition :(bijection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est une bijection de E dans F si elle injective et surjective

b) Propriété : Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F})\ (\exists\ !\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})\ (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E.

c)Définition (bijection réciproque): Si f est une bijection de E dans F; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}. f bijection de E dans F ; f^{-1}sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$$

6) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

a) Définition : Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$

L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble

$f^{-1}(B) = \{x \in E /\ f(x) \in B\}$

b) Propriété : Soit f une application de E dans F.

f est surjective de E dans F, si et seulement si : $f(E) = F$.

7) Restriction ; Prolongement d'une application

Définition : Soit f une application de E dans F

Soit A une partie de E, l'application définie de A vers F, qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble $\boldsymbol{A}$.

Soit Γ un ensemble tel que $E \subset \Gamma$, l'application définie de Γ vers F, qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle un prolongement de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$.

8) La partie entière d'un réel.

a) Théorème : On admet la proposition suivante :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists\ !\ k \in \mathbb{Z})\ (k \leq x < k + 1)$.

b) Définition : L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent S'appelle la partie entière du réel $\boldsymbol{x}$

On le note $[x]$ ou $E(x)$.

L'application qui lie chaque élément x de $\mathbb{R}$ par $E(x)$ dans $\mathbb{Z}$ s'appelle l'application partie entière.

Exemple : $E(\sqrt{2}) = 1$ $E(\sqrt{2}) = 1$; $E(\pi) = 3$

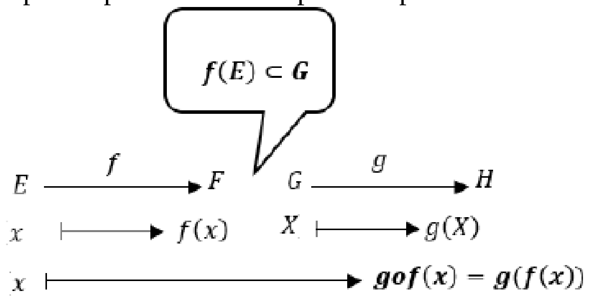
$E(-\pi) = -4$ et on a : $(\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$

9) Composition de deux applications.

a) Définition : Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}) \subset \boldsymbol{G}$, l'application h définie de E vers H par pour tout x dans E, $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note gof.

$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})\ (\boldsymbol{gof}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})))$

On peut représenter la composition par :



b) Propriété :

1) La composition de deux applications injectives est une application injective

2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective

3)La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

4)La composition des applications est associative : $(fog)oh = fo(goh)$

5) La composition des applications n'est pas commutative : $fog \neq gof$

c) autre Propriétés : Si f est une bijection de E dans F et $f-1$ sa bijection réciproque :

- $(\forall x \in E)$ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ $f^{-1} \circ f$ s'appelle l'identité de $\boldsymbol{E}$ et s note Id_E

- $(\forall x \in F)$ $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $f \circ f^{-1}$ s'appelle l'identité de $\boldsymbol{F}$ et s note Id_F

- Si $E = F$ alors : $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien